TEMA: OPERACIONES CON MATRICES Y DETERMINANTES

Problema 1: Sean las matrices:

$$A=\begin{bmatrix} x & 2 & 1 \\ 2 & 1 & y \\ 1 & z & 2 \end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\ ;D=\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Calcular los valores de *x, y, z* para que se verifique la siguiente igualdad:

$$A+BC=D$$

SOLUCIÓN:

- Producto $BC=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}=BC$

- Por tanto : $A = D - BC$

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3-2 & 3-1 & 2-3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 5-4 & 2-2 & 8-6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Igualando términos $\begin{bmatrix} x & 2 & -1 \\ -2 & 1 & y \\ 1 & z & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$x = 1 \qquad y = 2 \qquad z = 0$$

- NOTA: Dos matrices de distinto orden no se pueden sumar ni restar. Así, dos matrices del mismo orden se dice que son conformes respecto a la suma.
- NOTA: El producto AB está definido (puede realizarse) cuando el numero de columnas de A es igual al número de renglones de B. Cuando esto ocurre se dice que las matrices A y B son conformes respecto a la multiplicación.

Problema 2: Demostrar que $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

a) Suponiendo que A y B son matrices cuadradas del mismo orden:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

- Se tiene:

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11})^2 + (a_{12}+b_{12})(a_{21}+b_{21}) & (a_{11}+b_{11})(a_{12}+b_{12}) + (a_{12}+b_{12})(a_{22}+b_{22}) \\ (a_{11}+b_{11})(a_{21}+b_{21}) + (a_{21}+b_{21})(a_{22}+b_{22}) & (a_{22}+b_{22})^2 + (a_{12}+b_{12})(a_{21}+b_{21}) \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}{}^2 + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{21} & a_{22}{}^2 + a_{12}a_{21} \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}{}^2 + b_{12}b_{21} & b_{11}b_{12} + b_{12}b_{22} \\ b_{11}b_{21} + b_{12}b_{21} & b_{22}{}^2 + b_{12}b_{21} \end{bmatrix}$$

$$2AB = 2\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} a_{11}{}^2 + a_{12}a_{21} + b_{11}{}^2 + b_{12}b_{21} + 2a_{11}b_{11} + 2a_{12}b_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} + b_{11}b_{12} + b_{12}b_{22} + 2a_{11}b_{12} + 2a_{12}b_{22} \\ a_{11}a_{21} + a_{22}a_{21} + b_{11}b_{21} + b_{22}b_{21} + 2a_{21}b_{11} + 2a_{22}b_{21} & a_{22}{}^2 + a_{12}a_{21} + b_{11}{}^2 + b_{12}b_{21} + 2a_{21}b_{12} + 2a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} a_{11}{}^2 + 2a_{11}b_{11} + a_{12}a_{21} + b_{11}{}^2 + a_{12}b_{21} + b_{12}a_{21} + b_{12}b_{21} & a_{11}a_{12} + a_{11}b_{12} + b_{11}b_{12} + b_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} + a_{12}b_{22} + b_{12}a_{22} + b_{12}b_{22} \\ ..... & ..... \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\therefore A^2 + 2AB + B^2 \neq (A+B)^2}$$

b) Utilizando propiedades de matrices

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$
$$(A+B)(A+B) \neq A^2 + 2AB + B^2$$
$$A(A+B) + B(A+B) \neq A^2 + 2AB + B^2$$
$$A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$
$$\therefore AB + BA \neq 2AB$$

NOTA: La multiplicación de matrices no es conmutativa, esto es:
En general $AB \neq BA$; pero cuando $AB = BA$ se dice que las matrices son permutables o que conmutan.
De esta manera, es importante poner énfasis en el orden en que dos matrices se multiplican; asi en los siguientes productos:

$$AB \rightarrow "A" \; premultiplica \;\; a \;\; "B"$$
$$BA \rightarrow "A" \; postmultiplica \;\; a \;\; "B"$$

Problema 3: Calcular la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ por transformaciones elementales.

SOLUCIÓN:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] R_1(-1) + R_2 ; R_1(-1) + R_3 \quad \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] R_2(-2) + R_1$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] R_3(-3) + R_1 \quad \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Por lo tanto $$A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comprobación $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-2-3 & -2+2+0 & -3+0+3 \\ 6-3-3 & -2+3+0 & -3+0+3 \\ 6-2-4 & -2+2+0 & -3+0+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si cumple, $AA^{-1} = I$

NOTAS:

- Operaciones entre renglones → de arriba hacia abajo.
- El resto de los elementos de la columna donde esta el pivote "1" deben ser CEROS.
- Los ceros de las columnas deben obtenerse de izquierda a derecha.

Problema 4: Sean las matrices $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $M = \begin{bmatrix} 0 & 2x & 0 & 3 \\ 0 & 4x & x^2 & -3x^3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Determinar el conjunto de valores de $x \in R$ tales que *tr(MN) = 0*

SOLUCIÓN:

- Multiplicando:

$$MN = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2x & 0 & 3 \\ 0 & 4x & x^2 & -3x^3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$MN = \begin{bmatrix} 0+0+1 & 2x & -1 & 3+2 \\ 0 & 4x & x^2 & -3x^2 \\ 0 & 4x & x^2 & -3x^2 \\ 0 & 2x & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore tr(MN) = 1 + 4x + x^2 + 3 = 0$$

$$(x+2) \Leftarrow x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(4)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\therefore x = -2$$

- Comprobación

Si *x* = *-2*

$$MN = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & -8 & 4 & 24 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & 3+2 \\ 0 & -8 & 4 & 24 \\ 0 & -8 & 4 & 24 \\ 0 & -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore tr(MN) = 1 - 8 + 4 + 3 = 8 - 8 = 0 \quad \textit{cumple}$$

Problema 5: Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \ y\ C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

Determinar la matriz X que satisface la ecuación matricial:

$$AXB - \frac{1}{2}C = 0$$

SOLUCIÓN:

- $X = A^{-1} * \frac{1}{2} C * B^{-1}$

como A y C no son matrices cuadradas no tienen inversa

- Estableciendo el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -c & -d \\ 2a & 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b & -b & 2a \\ -d & d & -2c \\ 2b & -2d & 4a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

- Igualando términos

$$b = 1 \qquad \begin{matrix} 2a = 2 \\ a = 1 \end{matrix} \qquad d = -1 \qquad \begin{matrix} -2c = 0 \\ c = 0 \end{matrix}$$

- Finalmente

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Problema 6: Calcular el determinante de la siguiente matriz por el método de la matriz triangular:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \\ -3 & -5 & 1 & -8 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:

- Convirtiendo la matriz "A" en una matriz triangular superior:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \\ -3 & -5 & 1 & -8 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} R_1(-2) + R_2\,; R_1(3) + R_3\,; R_1(1) + R_4$$

No varía el determinante

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} R_3(2) + R_2\,; R_3(-1) + R_4$$

No varía el determinante

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} R_3 \Leftrightarrow R_2$$

Intercambio de filas, cambia de signo el determinante

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} R_3(1) + R_4$$

No varía el determinante

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matriz triangular superior

- Calculando el determinante

$$\det(A) = -(1)(1)(-3)(1) = -(-3)$$

det(A) = 3

Problema 7: Calcular por el método del desarrollo del desarrollo por cofactores el valor del siguiente determinante:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 & 2 \\ 4 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:

- Los ceros del tercer renglón sugieren que el desarrollo por cofactores se lleve a cabo por el mismo, es decir:

$$\det(A) = (0 * C_{31}) + (2 * C_{32}) - (1 * C_{33}) + (0 * C_{34})$$

- Calculo de cofactores:

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32}$$

$$C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$C_{32} = -(0 - 56 + 5 - 0 + 14 + 20)$$

$$C_{32} = -(-51 + 34) = -(-17)$$

$$C_{32} = 17$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} M_{33}$$

$$C_{33} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & 1 \\ -1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$C_{33} = -12 + 48 - 1 - 12 - 12 - 4$$

$$C_{33} = 36 - 29 = 7$$

$$C_{33} = 7$$

- Finalmente

$$\det(A) = 2(17) - 1(7) = 34 - 7$$
$$\det(A) = 27$$

Problema 8: Calcular el determinante de la siguiente matriz empleando el método de condensación:

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:

- Los ceros de la cuarta columna sugieren que se trabajen con ella; y tomar como pivote el (1) del tercer renglón:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} R_3(2)+R_1;R_3(-3)+R_4 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & -5 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Desarrollando por cofactores según la cuarta columna:

$$\det(A)=(1)(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 5 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 5 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

- Eligiendo ahora el primer renglón para el desarrollo y tomando como pivote al (1) de la primera columna:

$$\det(A)=(-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 5 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} C_1(1)+C_2;C_1(1)+C_3;C_1(-3)+C_4 \sim \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & -10 \\ -3 & 2 & -8 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

- Desarrollo por cofactores según el primer renglón

$C_{11} =$

$\det(A) = (-1)\left[80-100+96-240-200+16\right] = (-1)\left[192-540\right] = (-1)(-348)$

$\therefore \det(A) = 348$

Problema 8: Determinar la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ por medio de la adjunta.

SOLUCIÓN:

- Calculando cofactores de los elementos de "A":

$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0-4 = -4$

$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(0-8) = 8$

$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3-(-2) = 5$

$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 0-(-2) = 2$

$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(4-6) = 2$

$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0-2) = 2$

$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0-4 = -4$

$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1+0) = -1$

$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1-0 = -1$

- Matriz adjunta:

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 8 & -4 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Calculo del determinante:

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0+6+0-(-4+4+0) = 6 = \det(A)$$

- Calculando la inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\left[Adj(A)\right]$$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 8 & -4 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$ Inversa de la matriz “A”