SUBTEMA: VARIEDAD LINEAL

Problema 1: Expresar al conjunto $A=\left\{\begin{pmatrix} a & a-3 \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in R\right\}$ como una *variedad lineal* para:

a) $a = b = 0$
b) $a = b = 1$

SOLUCIÓN:

(a) Para $\boxed{a = b = 0} \longrightarrow \boxed{\bar{v}_o = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$ vector de apoyo

- Escribiendo la *variedad lineal*:

$$L = \bar{w} + \bar{v}_o \longrightarrow \bar{w} = L - \bar{v}_o = \begin{pmatrix} a & a-3 \\ b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \boxed{\bar{w} = \begin{pmatrix} a & a \\ b & a \end{pmatrix}}$$ vector asociado

- Por tanto:

$$\boxed{L=\left\{\begin{pmatrix} a & a \\ b & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a,b\in R\right\}}$$ *Variedad lineal* para $\boxed{a = b = 0}$

$\bar{w} \in$ W (sí es S.E.V.)

(b) Para $\boxed{a = b = 1} \longrightarrow \boxed{\bar{v}_o = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$

- La variedad Lineal:

$$L = \bar{w} + \bar{v}_o \longrightarrow \bar{w} = L - \bar{v}_o$$

- Sustituyendo Valores:

$$\bar{w}=\begin{pmatrix} a & a-3 \\ b & a \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-1 & a-3+2 \\ b-1 & a-1 \end{pmatrix}\Rightarrow \bar{w}=\begin{pmatrix} a-1 & a-1 \\ b-1 & a-1 \end{pmatrix}$$ Vector asociado

Pero: $\bar{w}=\begin{pmatrix} c & c \\ d & c \end{pmatrix}$ vector asociado si se considera $\boxed{a-1=c}$ $\boxed{b-1=d}$

- Por tanto:

$$\boxed{L=\left\{\begin{pmatrix} c & c \\ d & c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \middle| c,d\in R\right\}}$$ *Variedad lineal* para $\boxed{a=b=1}$

$\bar{w} \in$ W (sí es S.E.V.)

Problema 2: Determinar si el *conjunto solución* del siguiente sistema de ecuaciones lineales tiene estructura de variedad lineal:

-x - 3y + 2z = 10
3x + 8y – 4z = -26
2x + 5y – 2z = -16

En caso afirmativo, dar su espacio asociado, su dimensión y una base. En caso contrario, justificar su respuesta.

SOLUCIÓN:

- Resolviendo el sistema matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -10 \\ 3 & 8 & -4 & -26 \\ 2 & 5 & -2 & -16 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Se llega al sistema de ecuaciones equivalente:

x + 3y – 2z = -10
y – 2z = -4
0 z = 0

$\boxed{z = a \in R}$ $\boxed{y = 2a - 4}$ $x = -3y + 2z - 10$

$= -3(2a - 4) + 2a - 10$

$= -6a + 12 + 2a - 10$

$\boxed{x = -4a + 2}$

- Por tanto, el conjunto solución (C.S.) resulta:

C.S. = $\left\{\left(-4a+2, 2a-4, a\right) \middle| a \in R\right\}$

- El vector de apoyo se obtiene para $\boxed{a = 0}$ $\rightarrow$ $\boxed{\overline{v_o} = (2,-4,0)}$

- De la variedad lineal $L = \overline{w} + \overline{v_o}$ se despeja $\overline{w} = L - \overline{v_o}$.

- En donde sustituyendo valores:

$\overline{w} = (-4a + 2, 2a - 4, a) - (2,-4,0) = (-4a + \cancel{2} - \cancel{2}, 2a - \cancel{4} + \cancel{4}, a - 0)$

$\therefore$ $\boxed{\overline{w} = (-4a, 2a, a)}$ Vector asociado

- Finalmente:

$\boxed{L = \left\{(-4a, 2a, a) + (2,-4,0) \middle| a \in R\right\}}$ Variedad lineal

- Donde $\boxed{W = \left\{\left(-4a, 2a, a\right) \middle| a \in R\right\}}$ Espacio asociado

- Cuya *dimensión* y *base canónica* son:

$\boxed{\dim W = 1}$; $\boxed{B_{can.} = \left\{(-4,2,1)\right\}}$

Problema 3: Determinar si el siguiente subconjunto de los polinomios de grado menor o igual a dos:

$$L = \left\{ (a-1)x^2 (b-3)x + b + 5 \,\middle|\, a, b \in R \right\}$$

tiene estructura de variedad lineal; si es así, dar su espacio asociado, y su base canónica.

SOLUCIÓN:

- Vector de apoyo para $\boxed{a = b = 0}$ $\rightarrow$ $\boxed{\overline{v_o} = -x^2 - 3x + 5}$

- Nuevamente del concepto de *variedad lineal* $L = \overline{w} + \overline{v_o}$ se puede despejar y sustituir:

$$\overline{w} = L - \overline{v_o} = \left((a-1)x^2 + (b-3)x + b + 5 \right) - \left(x^2 - 3x + 5 \right)$$

$$= \left(a \cancel{-1+1} \right) x^2 + \left(b \cancel{-3+3} \right) x + \left(b \cancel{+5-5} \right) = ax^2 + bx + b = \overline{w}$$

vector asociado

- Por tanto:

$$\boxed{L = \left\{ \left(ax^2 + bx + b \right) + \left(-x^2 - 3x + 5 \right) \,\middle|\, a, b \in R \right\}}$$

"*L*" sí es *variedad lineal*

- Espacio asociado:

$$\boxed{W = \left\{ ax^2 + bx + b \,\middle|\, a, b \in R \right\}}$$

Espacio asociado (sí es S.E.V.)

$\boxed{\dim W = 2}$

$\boxed{B_{can}.\text{ de } W = \left\{ x^2, x+1 \right\}}$

Base canónica