TEMA: VALORES Y VECTORES CARACTERÍSTICOS

Problema 1: Sea M_2 el espacio vectorial real de las matrices de 2x2 con elementos reales y el operador lineal $S : M_2 \to M_2$ definido por:

$$S(A) = A^T$$

Determinar:

(a) Los valores característicos de *S*.
(b) Los espacios característicos correspondientes a cada uno de los valores característicos de *S*, sus dimensiones y una de sus bases.

SOLUCIÓN:

(a) • Se determina primero la *matriz asociada* $M(S) = A$, calculando las imágenes de los vectores de la base $B_{canonica}$ *de* $M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ del dominio

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}:$$

$$\left.\begin{array}{l} S\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ S\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ S\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ S\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \quad M(S) = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A}$$

• Se determina la matriz $A - \lambda I$:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}}$$

- Se calcula $det\left(A-\lambda I\right)=0$:

$$\det\left(A-\lambda I\right)=(1\text{-}\lambda)\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}=(1\text{-}\lambda)\left[(\lambda^2)(1\text{-}\lambda)-(1\text{-}\lambda)\right]=\boxed{(1\text{-}\lambda)(1\text{-}\lambda)(\lambda^2-1)=0}$$

- Resolviendo la ecuación anterior, se obtienen los *valores característicos* del operador lineal *S*: $\boxed{\lambda=1}$ y $\boxed{\lambda=-1}$

(b) • Los *espacios característicos* se determinan con la expresión $\left(A-\lambda I\right)\bar{\text{v}}=0$, para cada valor característico obtenido anteriormente.

- Es decir, $\boxed{para\ \ \lambda=1}$ se tiene la matriz $A-\lambda I\ =\boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$.

- Resolviendo matricialmente el sistema de ecuaciones $\left(A-\lambda I\right)\bar{\text{v}}=0$, donde $\bar{v}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in M_2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\approx\begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array}} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Del sistema de ecuaciones equivalente final, se obtiene:

$$b-c=0;\qquad 0a=0;\qquad 0d=0$$

- De donde: $\boxed{b=c}$; $\boxed{a=a}$; $\boxed{d=d}$.

- Por lo que, el vector $\bar{v}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ original se transforma en $\bar{v}=\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$.

- Finalmente se obtiene que:

$$\boxed{E(\lambda=1)=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \middle| a,b,d\in R\right\}} \rightarrow \text{ Espacio característico para } \lambda=1$$

$$\boxed{B_{canonica}\ de\ E(\lambda=1)=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}} \rightarrow \text{Base canónica}$$

$$\boxed{dim\ E(\lambda=1)=3} \rightarrow \text{ Dimensión}$$

- Ahora bien, para el otro valor característico $\boxed{\lambda=-1}$ se tiene la matriz:

$$A-\lambda I=\boxed{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$$

- Resolviendo matricialmente el sistema de ecuaciones $(A-\lambda I)\bar{v}=0$, donde $\bar{v}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in M_2$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{array}{c} \overbrace{\begin{matrix} a & \ b & \ c & \ d \end{matrix}} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Del sistema de ecuaciones equivalente final, se obtiene: $\boxed{a=0}$; $\quad b+c=0$; $\quad \boxed{d=0}$

$$\boxed{b=-c}$$

- Por lo que, el vector $\bar{v}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ original se transforma en $\bar{v}=\begin{bmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{bmatrix}$.

- Finalmente se obtiene que:

$$\boxed{E(\lambda=-1)=\left\{\begin{bmatrix}0 & -c\\ c & 0\end{bmatrix}\middle| c\in R\right\}} \rightarrow \text{ Espacio característico para } \lambda=-1$$

$$\boxed{B_{canonica}\ de\ E(\lambda=-1)=\left\{\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right\}} \rightarrow \text{ Base canónica}$$

$$\boxed{dim\ E(\lambda=-1)=1} \rightarrow \text{ Dimensión}$$