TEMA: INVERSA DE UNA TRANSFORMACIÓN

Problema 1: Sean $P_{\le 2}$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales, M_2 el espacio vectorial de las matrices simétricas de orden dos con elementos reales, $A = \{x^2, x, 1\}$ una base de $P_{\le 2}$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ una base de M_2 y $S : P_{\le 2} \to M_2$ una transformación lineal. Si la matriz asociada con S y referida a las bases A y B es $M_B^A(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Determinar:

(a) La regla de correspondencia de S.
(b) La regla de correspondencia de S^{-1}.

SOLUCIÓN:

(a) • Para determinar la regla de correspondencia de S, se utiliza la expresión:

$$\left[S(\bar{v}) \right]_B = M_B^A(S) \cdot (\bar{v})_A$$

• Se propone al vector $\boxed{\bar{v} = ax^2 + bx + c \in P_{\le 2}}$, y se escribe como combinación lineal de la base A:

$$\bar{v} = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = ax^2 + bx + c$$

• Se igualan términos en la expresión anterior:

$$\boxed{\alpha = a} \qquad \boxed{\beta = b} \qquad \boxed{\gamma = c} \quad \to \quad \boxed{(\bar{v})_A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}} \longleftarrow$$

Vector de coordenadas de $\bar{v}$ en la base A

• Se realiza la multiplicación $\left[S(\bar{v}) \right]_B = M_B^A(S) \cdot (\bar{v})_A$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} a \\ \frac{1}{2}b \\ c \end{bmatrix} = \left[S(\bar{v}) \right]_B} \longleftarrow$$

Vector de coordenadas de $S(\bar{v})$ en la base B

- Se escribe a $S\ \bar{v}$ como combinación lineal de la base B:

$$S\ \bar{v}\ = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} a & \tfrac{1}{2}b \\ \tfrac{1}{2}b & c \end{pmatrix}}$$

- Finalmente se obtiene:

$$\boxed{S\ \ ax^2 + bx + c\ \ = \begin{pmatrix} a & \tfrac{1}{2}b \\ \tfrac{1}{2}b & c \end{pmatrix}} \longleftarrow$$

Regla de correspondencia de "S"

(b) - Para la regla de correspondencia de S^{-1} se utiliza $M_A^B(S^{-1}) = \left[M_B^A\ \ S\ \ \right]^{-1}$.

- Calculando la inversa de $M_B^A\ \ S\ \ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$:

$$\left[M_B^A\ \ S\ \ \right]^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tfrac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \boxed{M_A^B\ \ S^{-1}\ \ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Matriz asociada con la transformación inversa S^{-1}

- Para obtener la regla de correspondencia de la transformación inversa se utiliza la expresión $M_A^B\ \ S^{-1}\ \ \ \bar{w}\ \ _B = \left[S^{-1}\ \ \bar{w}\ \ _A \right]$.

- Se propone por tanto al vector $\boxed{\bar{w} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M_2}$, y se escribe como combinación lineal de la base B:

$$\bar{w} = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}}$$

- Se igualan términos:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = a\\ \beta = b\\ \gamma = c\end{array}\right\} \quad \boxed{\left(\bar{w}\right)_B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}} \longleftarrow$$

Vector de coordenadas de $\bar{w}$ en la base B

- Realizando la multiplicación $M_A^B\left(S^{-1}\right)\cdot\left(\bar{w}\right)_B = \left[S^{-1}\left(\bar{w}\right)\right]_A$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} a \\ 2b \\ c \end{bmatrix} = \left[S^{-1}\left(\bar{w}\right)\right]_A} \longleftarrow$$

Vector de coordenadas de $S^{-1}\left(\bar{w}\right)$ en la base A

- Escribiendo a $S^{-1}\left(\bar{w}\right)$ como combinación lineal de la base A:

$$\boxed{S^{-1}\left(\bar{w}\right) = (a)x^2 + (2b)x + (c)}$$

- Finalmente se llega a:

$$\boxed{S^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = ax^2 + 2bx + c} \longleftarrow$$

Regla de correspondencia de la transformación inversa S^{-1}