TEMA: TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON

Problema 1: Utilizar el Teorema de Cayley-Hamilton para obtener:

(a) A^3 donde $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(b) B^{-1} donde $B=\begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN:

(a) • Se calcula la matriz $A-\lambda I$:

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix}}$$

• Se determina el polinomio característico:

$$A-\lambda I = (-1-\lambda)(2-\lambda)-3 = -2-2\lambda+\lambda+\lambda^2-3 = \boxed{\lambda^2-\lambda-5}$$

• Se evalúa $P(A) = 0$, sustituyendo la matriz A en el polinomio característico anterior:

$$P(A) = \boxed{A^2-A-5I=0}$$

• De donde: $\boxed{A^2 = A+5I}$.

• Y por tanto: $\boxed{A^3 = 6A+5I}$.

• Finalmente, sustituyendo valores, se obtiene A^3:

$$A^3 = 6\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 18 & 17 \end{bmatrix}}$$

(b) • Se calcula la matriz $B - \lambda I$:

$$B - \lambda I = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -11-\lambda & 2 & 2 \\ -4 & -\lambda & 1 \\ 6 & -1 & -1-\lambda \end{bmatrix}}$$

• Se determina el polinomio característico:

$$\det(B - \lambda I) = -11\lambda - \lambda^2 - 11\lambda^2 - \lambda^3 + 8 + 12 \boxed{= -\lambda^3 - 12\lambda^2 - 8\lambda + 1}$$

• Se evalúa $P(B) = 0$, sustituyendo la matriz B en el polinomio característico anterior:

$$P(B) = \boxed{B^3 + 12B + 8B - I = 0}$$

• Factorizando:

$$B(B^2 + 12B + 8I) = I$$

• La inversa resulta:

$$\boxed{B^{-1} = B^2 + 12B + 8I}$$

• Finalmente, sustituyendo valores, se obtiene B^{-1}:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} + 12\begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}}$$