TEMA: TRANSFORMACIÓN LINEAL, NÚCLEO Y RECORRIDO

Problema 1: Sean $P_{\leq 2}$ el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales y la transformación $F:\mathbb{R}^3 \to P_{\leq 2}$ definida por:

$$F(a,b,c)=(a+b)\overline{v_1}-c\overline{v_2}\,; \qquad \text{donde } \overline{v_1}=x^2+1\,;\ \overline{v_2}=3x-1\in P_{\leq 2}\quad \forall\, a,b,c\in\mathbb{R}$$

Determinar si F es lineal.

SOLUCIÓN:

- Se define la función sustituyendo los valores de $\overline{v_1}$ y $\overline{v_2}$ dados:

$$F(a,b,c)=(a+b)(x^2+1)-c(3x-1)=(a+b)x^2-3cx+(a+b+c)$$

$$\boxed{F(a,b,c)=(a+b)x^2-3cx+(a+b+c)} \longleftarrow \text{Nueva función}$$

- Se verifican los dos axiomas para que una función sea una transformación lineal:

1.- *Superposición*: $F(\overline{u}+\overline{v})=F(\overline{u})+F(\overline{v})$:

Sean $\overline{u}=(a_1,b_1,c_1) \quad\to\quad F(\overline{u})=\boxed{(a_1+b_1)x^2-3c_1x+(a_1+b_1+c_1)}$

$\overline{v}=(a_2,b_2,c_2) \quad\to\quad F(\overline{v})=\boxed{(a_2+b_2)x^2-3c_2x+(a_2+b_2+c_2)}$

$\overline{u}+\overline{v}=(a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2)$

$$F(\overline{u}+\overline{v})=\boxed{(a_1+a_2+b_1+b_2)x^2-3(c_1+c_2)x+(a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2)}$$

- Sustituyendo en el axioma $F(\overline{u}+\overline{v})=F(\overline{u})+F(\overline{v})$:

$$(a_1+a_2+b_1+b_2)x^2-3(c_1+c_2)x+(a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2)=\left[(a_1+b_1)x^2-3c_1x+(a_1+b_1+c_1)\right]+\left[(a_2+b_2)x^2-3c_2x+(a_2+b_2+c_2)\right]$$

$$\boxed{(a_1+a_2+b_1+b_2)x^2-3(c_1+c_2)x+(a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2)=(a_1+a_2+b_1+b_2)x^2-3(c_1+c_2)x+(a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2)}$$

Cumple

2.- *Homogeneidad*: $F(\alpha\overline{u})=\alpha\cdot F(\overline{u})$:

Sea $\alpha\overline{u}=(\alpha a_1,\alpha b_1,\alpha c_1) \quad\to\quad F(\alpha\overline{u})=\boxed{(\alpha a_1+\alpha b_1)x^2-3\alpha c_1x+(\alpha a_1+\alpha b_1+\alpha c_1)}$

- Sustituyendo en el axioma $F(\alpha\overline{u})=\alpha\cdot F(\overline{u})$:

$$(\alpha a_1+\alpha b_1)x^2-3\alpha c_1x+(\alpha a_1+\alpha b_1+\alpha c_1)=\alpha\left[(a_1+b_1)x^2-3c_1x+(a_1+b_1+c_1)\right]$$

$$\boxed{\alpha\left[(a_1+b_1)x^2-3c_1x+(a_1+b_1+c_1)\right]=\alpha\left[(a_1+b_1)x^2-3c_1x+(a_1+b_1+c_1)\right]}$$

Cumple

- Por tanto, la transformación F sí es lineal.

Problema 2: Sea la transformación $S: P_{\leq 2} \rightarrow R^2$, definida por:

$$S(ax^2 + bx + c) = (a+b, c)$$

Determinar:

(a) Si S es una transformación lineal
(b) El núcleo de la transformación S
(c) El recorrido de la transformación S
(d) Verificar $dim\, P_{\leq 2} = dim\, N(S) + dim\, S(P_{\leq 2})$

SOLUCIÓN:

(a) Para determinar si S es lineal, se verifican los dos axiomas siguientes:

1.- *Superposición*:

$$S(\overline{v_1} + \overline{v_2}) = S(\overline{v_1}) + S(\overline{v_2})$$

Sean: $\overline{v_1} = a_1x^2 + b_1x + c_1 \quad \rightarrow \quad S(\overline{v_1}) = \boxed{(a_1 + b_1, c_1)}$

$\overline{v_2} = a_2x^2 + b_2x + c_2 \quad \rightarrow \quad S(\overline{v_2}) = \boxed{(a_2 + b_2, c_2)}$

$\overline{v_1} + \overline{v_2} = (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)$

● Sustituyendo en el axioma, se tiene:

$$\boxed{S(\overline{v_1} + \overline{v_2}) = (a_1 + a_2 + b_1 + b_2, c_1 + c_2) = S(\overline{v_1}) + S(\overline{v_2})} \quad \leftarrow \quad \text{Cumple}$$

2.- *Homogeneidad*: $S(\alpha\overline{v_1}) = \alpha \cdot S(\overline{v_1})$

Sea $\alpha\overline{v_1} = \alpha a_1x^2 + \alpha b_1x + \alpha c_1 \rightarrow \boxed{S(\alpha\overline{v_1}) = (\alpha a_1 + \alpha b_1, \alpha c_1) = \alpha \cdot S(\overline{v_1})} \leftarrow$ Cumple

• Por tanto, la transformación S sí es lineal.

(b) El núcleo $N(S)$ de la transformación se define como $N(S) = \left\{ \overline{v} \in P_{\leq 2} \;\middle|\; S(\overline{v}) = \overline{0}_{R^2} \right\}$.

● Se propone al vector $\boxed{\overline{v} = ax^2 + bx + c \in P_{\leq 2}}$.

● Se iguala la imagen de $\overline{v}$ con el vector cero del codominio:

$$S\left(\bar{v}\right)=S\left(ax^2+bx+c\right)=\boxed{\left(a+b,c\right)=\left(0,0\right)}$$

● Igualando términos en los vectores anteriores: $a+b=0;\quad c=0$

● De donde $\boxed{a=-b}$ y $\boxed{c=0}$.

● Por tanto, el vector propuesto se transforma en: $\bar{v}=ax^2+bx+c=\boxed{-bx^2+bx}$.

● Finalmente, el núcleo es: $\boxed{N\left(S\right)=\left\{-bx^2+bx \mid b\in R\right\}}$

$$\boxed{\dim N(S)=1}$$

(c) El recorrido de la transformación se determina a partir de la base canónica del dominio $P_{\leq 2}=\left\{ax^2+b\,x+c \mid a,b,c\ \in R\right\}$:

$$\boxed{B_{canonica}\ de\ P_{\leq 2}=\left\{x^2,x,1\right\}}$$

● Se obtienen las imágenes de los vectores de la base canónica anterior:

$$S\left(x^2\right)=\left(1,0\right)$$
$$S\left(x\right)=\left(1,0\right)$$
$$S\left(1\right)=\left(0,1\right)$$

● Las imágenes anteriores constituyen el *Conjunto Generador* del recorrido:

$$C.G=\left\{\left(1,0\right),\left(1,0\right),\left(0,1\right)\right\}$$

● Se determina el *Espacio Renglón* del conjunto generador anterior:

$$\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{B_{canonica}\ de\ S\left(P_{\leq 2}\right)=\left\{\left(1,0\right),\left(0,1\right)\right\}}$$

● Obteniendo el vector genérico con la base canónica anterior:

$$\bar{w}=a\left(1,0\right)+b\left(0,1\right)=\left(a,0\right)+\left(0,b\right)=\boxed{\left(a,b\right)}$$

● Finalmente, el recorrido es: $\boxed{S\left(P_{\leq 2}\right)=\left\{\left(a,b\right)\middle|a,b\in R\right\}}$.

$$\boxed{dim\ S\left(P_{\leq 2}\right)=2}$$

(d) Verificando $dim\ P_{\leq 2}=dim\ N\left(S\right)+dim\ S\left(P_{\leq 2}\right)$ se tiene:

$$\boxed{3 \quad = \quad 1 \quad + \quad 2} \quad \leftarrow \quad \text{Cumple}$$

$\boxed{\textbf{Problema 3:}}$ Para la transformación lineal $S:R^3\rightarrow M_2$ definida por:

$$S(x,y,z)=\begin{bmatrix} x-2y & y+z \\ y+z & x-y+z \end{bmatrix}$$

donde M_2 es el espacio vectorial real de las matrices simétricas de orden dos con elementos reales, obtener:

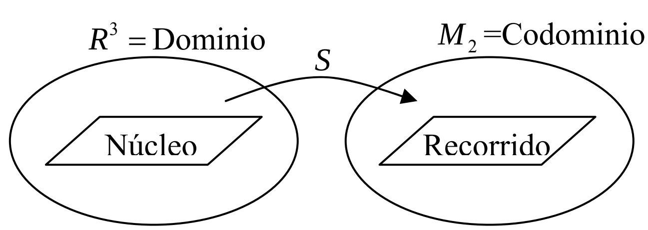
(a) El núcleo $N(S)$ de la transformación, su dimensión y una de sus bases.

(b) El recorrido $S(R^3)$ de la transformación, su dimensión y una de sus bases.

(c) Demostrar que: $\dim R^3=\dim N(S)+\dim S(R^3)$.

SOLUCIÓN:

(a) • Esquemáticamente la transformación es:



• El núcleo está dado por el conjunto $N(S)=\left\{\bar{v}\ \in\ R^3\middle|S(\bar{v})=\bar{0}_{M_2}\right\}$.

• Para determinar $N(S)$, se propone al vector: $\boxed{\bar{v}=(x,y,z)\in R^3}$.

• Cuya imagen es:

$$S(\bar{v})=\begin{bmatrix} x-2y & y+z \\ y+z & x-y+z \end{bmatrix}=\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^{\bar{0}_{M_2}}$$

- Igualando términos en los vectores anteriores, se llega al sistema de ecuaciones:

$$x-2y=0$$
$$y+z=0$$
$$x-y+z=0$$

- Resolviéndolo matricialmente, se tiene:

$$\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}(-1)\sim\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}(-1)\sim\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}x-2y=0\\y+z=0\\0z=0\end{matrix}\qquad \begin{matrix}x=2y\\\boxed{\therefore x=-2z}\\\boxed{y=-z}\\\boxed{z=z}\end{matrix}$$

- Es decir, el vector $\bar{v}=(x,y,z)$ propuesto originalmente se transforma en:

$$\boxed{\bar{v}=(-2z,-z,z)}$$

- Por tanto:

$$\boxed{N(S)=\{(-2z,-z,z)\,|\,z\in\mathbb{R}\}} \longleftarrow \text{Núcleo de transformación } S$$

$$\boxed{\dim N(S)=1} \longleftarrow \text{Dimensión}$$

$$\boxed{B_{canonica}\ de\ N(S)=\{(-2,-1,1)\}} \longleftarrow \text{Base canónica}$$

(b) • El recorrido es un conjunto de la forma: $S(R^3)=\left\{S(\bar{u})\,\middle|\,\bar{u}\in R^3\right\}$.

- El dominio de la transformación S es $R^3=\{(x,y,z)\,|\,x,y,z\in\mathbb{R}\}$.
- La base canónica del dominio es $B_{canonica}\ de\ R^3=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.
- Las imágenes de los vectores de la base canónica anterior son:

$$S(1,0,0)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix};\qquad S(0,1,0)=\begin{bmatrix}-2&1\\1&-1\end{bmatrix};\qquad S(0,0,1)=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$$

- Las cuales, constituyen al conjunto generador del recorrido:

$$C.G.=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2&1\\1&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\right\}$$

- Se obtiene el espacio renglón generado por el conjunto anterior (aplicando isomorfismo):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (2) \\ \lrcorner \\ \ \end{matrix} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz canónica escalonada}} \Rightarrow \boxed{B_{canonica}\ de\ S(R^3) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}}$$

- Vector genérico del recorrido (haciendo combinación lineal con los vectores de la base canónica anterior):

$$\bar{w} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} a & b \\ b & a+b \end{bmatrix} = \bar{w}}$$

- Finalmente:

$$\boxed{S\left(R^3\right) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a+b \end{bmatrix} \middle| a,b \in R \right\}} \longleftarrow \text{Recorrido de la transformación } S$$

$$\boxed{\dim S(R^3) = 2} \longleftarrow \text{Dimensión}$$

(c) •Se verifica el teorema: $\dim R^3 = \dim N(S) + \dim S(R^3)$

$$\boxed{3 \quad = \quad 1 \quad + \quad 2} \longleftarrow \text{Cumple}$$

Problema 4: Para la transformación lineal $T : R^3 \to R^3$ definida por:

$$T\left(x,y,z\right) = \left(3x+y, 6x-z, 2y+z\right)$$

Obtener:
(a) El núcleo de T y su dimensión.
(b) El recorrido de T y su dimensión.

SOLUCIÓN:

(a) • El núcleo está dado por el conjunto $N\left(T\right) = \left\{ \bar{v} \in \mathrm{R}^3 \middle| \mathrm{T}\left(\bar{\mathrm{v}}\right) = \bar{0}_{R^3} \right\}$

- Se propone al vector $\boxed{\bar{v} = \left(x,y,z\right) \in R^3}$, cuya imagen es:

$$T\left(\bar{v}\right)=\left(3x+y,6x-z,2y+z\right)=\bar{0}_{R^3}=\left(0,0,0\right)$$

● Igualando términos:

$$\begin{aligned}3x+y&=0\\6x-z&=0\\2y+z&=0\end{aligned}$$

● Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior matricialmente:

$$\begin{pmatrix}3&1&0\\6&0&-1\\0&2&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}3&1&0\\1&-2&-1\\0&2&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}3&1&0\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{aligned}3x+y&=0\\2y+z&=0\\0z&=0\end{aligned}$$

$$\boxed{z=k\in R}\ ;\ 2y=-z\ \rightarrow\ \boxed{y=-\frac{1}{2}k}\ ;\ 3x=-y\ \rightarrow\ x=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}k\right)=\boxed{\frac{1}{6}k=x}$$

● Por tanto, el vector propuesto originalmente se transforma en:

$$\bar{v}=\left(x,y,z\right)=\left(\frac{1}{6}k,-\frac{1}{2}k,k\right)=\boxed{\left(k,-3k,6k\right)=\bar{v}}$$

● Siendo el núcleo de la transformación T:

$$\boxed{N\left(T\right)=\left\{(k,-3k,6k)\middle|\ k\in \mathrm{R}\right\}}\qquad\boxed{\dim N\left(T\right)=1}$$

(b) ● Para determinar el recorrido de la transformación, se toma en cuenta el dominio:

$$\boxed{R^3=\left\{\left(x,y,z\right)\middle|x,y,z\in R\right\}}\ ;\ \boxed{\dim R^3=3}$$

● La base canónica del dominio R^3 es $B_{canonica}\ de\ R^3=\left\{\left(1,0,0\right),\left(0,1,0\right)\left(0,0,1\right)\right\}$.

● Las imágenes de la base canónica anterior, constituyen al conjunto generador *C.G.* del recorrido:

$$\left.\begin{aligned}T\left(1,0,0\right)&=\left(3,6,0\right)\\T\left(0,1,0\right)&=\left(1,0,2\right)\\T\left(0,0,1\right)&=\left(0,-1,1\right)\end{aligned}\right\}\quad C.G.=\left\{\left(3,6,0\right),\left(1,0,2\right),\left(0,-1,1\right)\right\}$$

● Determinando el espacio renglón a partir del conjunto generador anterior:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \begin{array}{l} \text{Forma} \\ \text{canonica} \\ \text{escalonada} \end{array}$$

● De la matriz en forma canónica escalonada se obtiene:

$$\boxed{B_{canonica}\ de\ T(R^3) = \left\{ (1,0,2), (0,1,-1) \right\}}$$

● El vector genérico es por tanto:

$$\overline{w} = a(1,0,2) + b(0,1,-1) = \boxed{(a,b,2a-b) = \overline{w}}$$

● Finalmente, el recorrido es:

$$\boxed{T\left(R^3\right) = \left\{ (a,b,2a-b) \middle| a,b \in R \right\}} \quad ; \quad \boxed{\dim T\left(R^3\right) = 2}$$

(c) ● Verificando el axioma $\dim R^3 = \dim \mathrm{N}(\mathrm{T}) + \dim T\left(R^3\right)$:

$$\boxed{3 \quad = \quad 1 \quad + \quad 2} \leftarrow \text{ Se cumple}$$