SUBTEMA. SUBESPACIOS VECTORIALES

Problema 1: Determinar si el subconjunto W es un subespacio vectorial bajo la condición dada:

$$W = \quad a, b, c \ \big|\ 4a + 2b - c = 0;\ a, b, c \in R$$

SOLUCIÓN:

- Tomando en cuenta la condición dada c = 4a + 2b, el nuevo conjunto W es:

$$W = \quad a, b, 4a + 2b \ \big|\ a, b \in R$$

- Verificando axiomas:

1.- Cerradura para la suma:

$$\bar{u} + \bar{v} = \ a_1, b_1, 4a_1 + 2b_1 \ + \ a_2, b_2, 4a_2 + 2b_2$$
$$= \ a_1 + a_2, b_1 + b_2, 4a_1 + 4a_2 + 2b_1 + 2b_2$$
$$= \ a_1 + a_2, b_1 + b_2, 4 \ a_1 + a_2 \ + 2 \ b_1 + b_2$$

Si $a_1 + a_2 = a_3$; $b_1 + b_2 = b_3$, entonces:

$$\boxed{\bar{u} + \bar{v} = \ a_3, b_3, 4a_3 + 2b_3 \ \in W} \leftarrow \text{cumple}$$

2.- Cerradura para la multiplicación:

$$\alpha\bar{u} = \alpha \ a, b, 4a + 2b$$
$$= \ \alpha a, \alpha b, 4\alpha a + 2\alpha b$$

Si $\alpha a = a_4$; $\alpha b = b_4$, entonces:

$$\boxed{\alpha\bar{u} = \ a_4, b_4, 4a_4 + 2b_4 \ \in W} \leftarrow \text{cumple}$$

- Por tanto, el subconjunto W sí es un subespacio vectorial de R^3.

Problema 2: Sea $P_{\leq n}$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a n con coeficientes reales. Determinar cuál de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de $P_{\leq n}$:

(a) $A = \ \ p(x) \,|\, p(7) = 0$

(b) $B = \ \ p(x) \,|\, p(-5) = 2 + p(3)$

SOLUCIÓN:

(a) • Verificando axiomas para el subconjunto A:

1.- Cerradura para la suma:

$$\bar{u} \rightarrow p_1(7) = 0$$
$$\bar{v} \rightarrow p_2(7) = 0$$
$$\bar{u} + \bar{v} \rightarrow (p_1 + p_2)(7) = 0$$

Si $p_1 + p_2 = p_3$ entonces:

$\boxed{\bar{u} + \bar{v} \rightarrow p_3(7) = 0 \ \in \ A}$ $\leftarrow$ Cumple

2.- Cerradura para la multiplicación:

$$\alpha\bar{u} \rightarrow \alpha \ \ p(7) = 0 \ \ = (\alpha p)(7) = 0$$

Si $\alpha p = p_4$ entonces:

$\boxed{\alpha\bar{u} \rightarrow p_4(7) = 0 \ \in \ A}$ $\leftarrow$ Cumple

• Por tanto, el subconjunto A <u>sí es</u> un subespacio vectorial de $P_{\leq n}$.

(b) • Verificando axiomas para el subconjunto B:

1.- Cerradura para la suma:

$$\bar{u} \to p_1(-5) = 2 + p_1(3)$$
$$\bar{v} \to p_2(-5) = 2 + p_2(3)$$

$$\boxed{\bar{u}+\bar{v} \to (p_1+p_2)(-5) = 4 + (p_1+p_2)(3) \notin B} \quad \leftarrow \quad \text{No cumple}$$

2.- Cerradura para la multiplicación:

$$\alpha\bar{u} \to \alpha \;\; p(-5) = 2 + p(3) \;\; = (\alpha p)(-5) = 2\alpha + (\alpha p)(3)$$

Si $\alpha p = p_4$ entonces:

$$\boxed{\alpha\bar{u} \to p_4(-5) = 2\alpha + p_4(3) \notin B \;\; \forall \alpha \neq 1} \quad \leftarrow \quad \text{No cumple}$$

- Por tanto, el subconjunto B <u>no es</u> un subespacio vectorial de $P_{\leq n}$.

Problema 3: Sean M y N dos subespacios del espacio vectorial real de las matrices de $m \times n$, donde:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, b = a + c; a, b, c, d \in R \right\}$$
$$N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, c = a + 2b; a, b, c, d \in R \right\}$$

Demostrar que el conjunto $M \cap N$ es un subespacio vectorial de las matrices de $m \times n$.

<u>SOLUCIÓN:</u>

- La intersección es:

$$M \cap N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, b = a + c; \; c = a + 2b; \; a, b, c, d \in R \right\}$$

- Tomando en cuenta las condiciones del conjunto intersección anterior:

$$\begin{aligned} a-b+c&=0\\ a+2b-c&=0 \end{aligned}$$

- Se tiene, matricialmente que:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$$

- De donde: $b-\frac{2}{3}c=0 \quad \rightarrow \quad \boxed{b=\frac{2}{3}c}$

$$a-b+c=0 \;\rightarrow\; a=\frac{2}{3}c-c \;\rightarrow\; \boxed{a=-\frac{1}{3}c}$$

- Por tanto, la intersección se transforma en:

$$\boxed{M\cap N=\left\{\left.\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}c & \frac{2}{3}c & c\\ d & 0 & 0 \end{pmatrix}\right| c,d\in R\right\}} \leftarrow \text{ Conjunto intersección}$$

- Verificando axiomas:

1.- Cerradura para la suma:

$$\bar{u}+\bar{v}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}c_1 & \frac{2}{3}c_1 & c_1\\ d_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}c_2 & \frac{2}{3}c_2 & c_2\\ d_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(c_1+c_2) & \frac{2}{3}(c_1+c_2) & (c_1+c_2)\\ (d_1+d_2) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $c_1+c_2=c_3$ y $d_1+d_2=d_3$, entonces:

$$\boxed{\bar{u}+\bar{v}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}c_3 & \frac{2}{3}c_3 & c_3 \\ d_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \ M \cap N} \quad \leftarrow \quad \text{Cumple}$$

2.- Cerradura para la multiplicación:

$$\alpha\bar{u}=\alpha\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}c & \frac{2}{3}c & c \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\alpha c & \frac{2}{3}\alpha c & \alpha c \\ \alpha d & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\alpha c = c_4$ y $\alpha d = d_4$, entonces:

$$\boxed{\alpha\bar{u}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}c_4 & \frac{2}{3}c_4 & c_4 \\ d_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \ M \cap N} \quad \leftarrow \quad \text{Cumple}$$

- Por tanto, <u>queda demostrado</u> que $M \cap N$ <u>sí es</u> un subespacio vectorial de las matrices de $m \times n$.