OPERADOR ADJUNTO

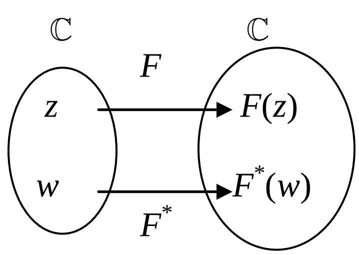
$\boxed{\textbf{Problema 1:}}$ Sea el espacio vectorial $\mathbb{C}$ con producto interno complejo definido por $\left(z \middle| w\right) = z \cdot \overline{w}$, en donde $\overline{w}$ es el conjugado de w. Obtener el adjunto del operador lineal $F:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cuya regla de correspondencia es:

$$F(z)=\alpha\, z$$

Donde $\alpha \in \mathbb{C}$ es un número fijo dado.

<u>Solución:</u>

Datos $\to$ P.I. $\left(z \middle| w\right) = z \cdot \overline{w} \leftarrow$ Conjugado



; donde: $F(z)=\alpha\, z$

- Con la definición de adjunto:

$$\left(F(z) \middle| w\right) = \left(z \middle| F^*(w)\right)$$

- Sustituyendo:

$$\left(\alpha z \middle| w\right) = \left(z \middle| F^*(w)\right)$$

$$\left(\alpha z\right)\left(\overline{w}\right) = z \cdot \overline{\left[F^*(w)\right]}$$

$$\overline{\left[F^*(w)\right]} = \frac{\alpha \cancel{z} \cdot \overline{w}}{\cancel{z}}$$

$$\overline{\left(\overline{F^*(w)} = \alpha \cdot \overline{w}\right)}$$

$$F^*\left(w\right) = \overline{\alpha} \cdot w \quad \leftarrow \quad \text{Adjunto del operador “}F\text{”}$$

Problema 2: Determinar el adjunto T^* del operador $T:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definido por:

$$T(x,y) = \left(-x-5iy, [2+i]y\right)$$

Solución: Para determinar el adjunto se selecciona o propone una base ortonormal de $\mathbb{C}^2$ para el producto interno usual:

$$B = \{\underset{e_1}{(1,0)}, \underset{e_2}{(0,1)}\} \to \text{Base ortonormal}$$

$$\underbrace{\begin{aligned} &(\overline{e_1}|\overline{e_2}) = [(1,0)|(0,1)] = \cancel{(1)(0)} + \cancel{(0)(1)} = 0 \\ &(\overline{e_1}|\overline{e_1}) = [(1,0)|(1,0)] = (1)(1) + \cancel{(0)(0)} = 1 \\ &\therefore \|\overline{e_1}\| = 1 \\ &(\overline{e_2}|\overline{e_2}) = [(0,1)|(0,1)] = \cancel{(0)(0)} + (1)(1) = 1 \\ &\therefore \|\overline{e_2}\| = 1 \end{aligned}}_{\text{con P.I. usual en } \mathbb{C}^2}$$

Se determina la matriz asociada a T y referida a la base "B":

(a) Imágenes de los vectores de "B":

$$T(1,0) = (-1,0)$$
$$T(0,1) = (-5i, 2+i)$$

(b) Imágenes anteriores como C.L. de "B":

$$(-1,0) = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1)$$
$$\underbrace{(-1,0) = (\alpha_1, \alpha_2)}$$
$$\boxed{\alpha_1 = -1}$$
$$\boxed{\alpha_2 = 0}$$

;

$$\underbrace{(-5i, 2+i) = (\beta_1, \beta_2)}$$
$$\boxed{\beta_1 = -5i}$$
$$\boxed{\beta_2 = 2+i}$$

(c) La matriz resulta:

$$M_B^B(T) = \begin{pmatrix} -1 & -5i \\ 0 & 2+i \end{pmatrix}$$

La conjugada transpuesta de la matriz anterior es:

$$\left[M_B^B(T)\right]^* = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5i & 2-i \end{pmatrix}}_{\text{Es la matriz asociada al operador adjunto y referida a la base } B} = M_B^B(T^*)$$

La regla de correspondencia se puede determinar con: $M_B^B\left(T^*\right).\left(\overline{u}\right)_B = \left[T^*\left(\overline{u}\right)\right]_B$

Sea $\overline{u} = (x, y) \in \mathbb{C}^2$ como C.L de "*B*":

$\overline{u} = \alpha(1,0) + \beta(0,1)$

$(x, y) = (\alpha, \beta) \rightarrow \boxed{\alpha = x}; \boxed{\beta = y} \quad \therefore \quad \left(\overline{u}\right)_B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Multiplicando: $M_B^B\left(T^*\right)\cdot\left(\overline{u}\right)_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5i & 2-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 5ix + (2-i)y \end{pmatrix} = \left[T^*\left(\overline{u}\right)\right]_B$

Finalmente:

$$T^*\left(\overline{u}\right) = (-x)(1,0) + \left[5ix + (2-i)y\right](0,1) = \left(-x, 5ix + (2-i)y\right)$$

$$\therefore \quad \underbrace{T^*(x, y) = \left(-x, 5ix + (2-i)y\right)}_{\text{Regla de correspondencia del adjunto de } T}$$

OPERADOR NORMAL

Problema 3: Sea V un espacio vectorial con producto interno complejo y $\lambda \in \mathbb{C}$. Determinar si el operador $T{:}V \rightarrow V$ tal que $\underbrace{T\left(\bar{v}\right) = \lambda \bar{v}}_{\text{Regla de correspondencia del operador}}$ es normal.

Solución:

Para que el operador sea normal:

$$T^* \circ T = T \circ T^*$$

Matricialmente:

$$A^* \cdot A = A \cdot A^*$$

Con la definición del operador adjunto:

$$\left(T\left(\bar{v}\right) \middle| \bar{u}\right) = \left(\bar{v} \middle| T^*\left(\bar{u}\right)\right)$$

$$\left(\lambda \bar{v} \middle| \bar{u}\right) = \left(\bar{v} \middle| T^*\left(\bar{u}\right)\right)$$

$$\lambda\left(\bar{v} \middle| \bar{u}\right) = \left(\bar{v} \middle| T^*\left(\bar{u}\right)\right)$$

$$\left(\bar{v} \middle| \overline{\lambda} \bar{u}\right) = \left(\bar{v} \middle| T^*\left(\bar{u}\right)\right)$$

$$\therefore \quad T^*\left(\bar{u}\right) = \overline{\lambda} \bar{u}$$

Propiedad del producto interno:

$$\left(\bar{u} \middle| \alpha \bar{v}\right) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Conjugado}}}{\overline{\alpha}}\left(\bar{u} \middle| \bar{v}\right)$$

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = \left|\alpha\right|^2$$

Con la definición de composición:

$$\left(T \circ T^*\right)\left(\bar{u}\right) = T\left[T^*\left(\bar{u}\right)\right] = \underbrace{T\left(\overline{\lambda}\bar{u}\right)}_{\text{Con la regla de correspondencia de “}T\text{”}} = \lambda \cdot \overline{\lambda} \bar{u}$$

$$\therefore \; \left(T \circ T^*\right)\left(\bar{u}\right) = \left|\lambda\right|^2 \bar{u}$$

$$\left(T^* \circ T\right)\left(\bar{u}\right) = T^*\left[T\left(\bar{u}\right)\right] = T^*\left(\lambda \bar{u}\right) = \overline{\lambda} \cdot \lambda \bar{u}$$

$$\therefore \; \left(T^* \circ T\right)\left(\bar{u}\right) = \left|\lambda\right|^2 \bar{u}$$

Por lo tanto, como:

$$\left(T \circ T^*\right)\left(\bar{u}\right) = \left(T^* \circ T\right)\left(\bar{u}\right)$$

$$\underbrace{\left|\lambda\right|^2 \bar{u} = \left|\lambda\right|^2 \bar{u}}_{\text{“}T\text{” es un operador normal}}$$

OPERADOR HERMITIANO

Problema 4: Demostrar que el operador lineal $T:\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definido por:

$$T(z_1, z_2) = (z_2, z_1 + z_2) \qquad \forall\ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$$

es un operador hermitiano con el producto interno ordinario en $\mathbb{C}^2$ y verificar que como consecuencia de ello, sus valores característicos son reales.

Solución: Un operador es hermitiano cuando $A^* = A$

Matriz asociada a "*T*" referida a una base ortonormal

a) Matriz asociada: $B_{\text{canónica}}$ de $\mathbb{C}^2 = \{(1,0),(0,1)\}$

Es base ortonormal

Imágenes:

$$T(1,0) = (0,1)$$
$$T(0,1) = (1,1)$$

$$M(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A \rightarrow \text{Matriz conjugada transpuesta } A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se cumple que:

$$A^* = A$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \therefore \text{ el operador "}T\text{" es hermitiano}$$

b) Un operador también es hermitiano cuando:

$$T^* = T$$

Y se debe cumplir: $\left(T\left(\bar{u}\right) \middle| \bar{v}\right) = \left(\bar{u} \middle| T^*\left(\bar{v}\right)\right) \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{C}^2$ -------- (1)

Sean los vectores:

$$\bar{u} = (a,b) \rightarrow T\left(\bar{u}\right) = \boxed{(b, a+b)}$$
$$\bar{v} = (c,d) \rightarrow T^*\left(\bar{v}\right) = \boxed{(d, c+d)}$$

Sustituyendo en (1):

$$\left(T\left(\bar{u}\right)\middle|\bar{v}\right)=\left(\bar{u}\middle|T^{*}\left(\bar{v}\right)\right)$$

$$\left[(b,a+b)\,|\,(c,d)\right]=\left[(a,b)\,|\,(d,c+d)\right]$$

con P.I. ordinario

$$b\bar{c}+(a+b)\bar{d}=a\bar{d}+b\overline{(c+d)}$$

$$b\bar{c}+(a+b)\bar{d}=a\bar{d}+b(\bar{c}+\bar{d})$$

$$b\bar{c}+(a+b)\bar{d}=a\bar{d}+b\bar{c}+b\bar{d}$$

$$b\bar{c}+(a+b)\bar{d}=b\bar{c}+(a+b)\bar{d}$$

Cumple

$\therefore$ queda demostrado que “T” es hermitiano.

OPERADOR SIMÉTRICO

Problema 5: **(a)** Demostrar que el operador lineal $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por: $T(x,y) = (2x,x)$ es un operador simétrico con el producto interno siguiente:

$$\left[(x_1, y_1) \mid (x_2, y_2)\right] = x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2y_1y_2$$

(b) Obtener la matriz M_1 asociada al operador T referida a la base canónica.
(c) Obtener la matriz M_2 asociada al operador T referida a la base A={(1,1),(1,0)}.
(d) Obtener la matriz M_3 asociada al operador T referida a la base $B=\left\{\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$.
(e) De las matrices M_1, M_2 y M_3 obtenidas en los incisos anteriores ¿Cuáles son simétricas?
(f) ¿Qué característica con relación al producto interno, tienen las bases a las cuales están referidas las matrices M_1, M_2 y M_3, para que estas matrices sean o no simétricas?

Solución:

(b) Sea B= {(1,0),(0,1)}→ Base ortonormal de $\mathbb{R}^2$

Imágenes:

$T(1,0) = (2,1)$

$T(0,1) = (0,0)$

$$\longrightarrow M(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M_1 \longleftarrow$$ Matriz asociada a "T" referida a base canónica "B"

$$M_1^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to M_1^T \neq M_1 \;\therefore\; "M_1"$$ no es simétrica

(c) Imágenes de A={(1,1),(1,0)}:

$T(1,1) = (2,1)$

$T(1,0) = (2,1)$

Imágenes anteriores como C.L de "A":

$$(2,1) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,0)$$
$$\underbrace{(2,1) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1)}$$
$$\boxed{\alpha_1 = 1}$$
$$\longrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 2$$
$$\alpha_2 = 2 - 1 = \boxed{1}$$

;

$$\underbrace{(2,1) = (\beta_1 + \beta_2, \beta_1)}$$
$$2 = \beta_1 + \beta_2$$
$$\beta_2 = 2 - 1$$
$$\boxed{\beta_2 = 1} \;;\; \boxed{\beta_1 = 1}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = M_A^A(T)$$
$$\downarrow$$
$$M_2^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$M_2^T = M_2$$
$\therefore$ "M_2" es simétrica

(d) Imágenes de $B=\left\{\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$:

$$T\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(2\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$$

$$T\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(0,0\right)$$

Imágenes anteriores como C.L de "*B*":

$$\left(2\sqrt{2},\sqrt{2}\right)=\alpha_1\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\alpha_2\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\underbrace{\left(2\sqrt{2},\sqrt{2}\right)=\left(\alpha_1\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_1-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_2\right)}_{\text{Igualando términos:}}$$

$$\alpha_1\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

$$\boxed{\alpha_1=2}$$

;

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_1-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_2=\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(2-\alpha_2)=\sqrt{2}$$

$$2-\alpha_2=\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2}}=\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{1}\cdot\frac{2}{\cancel{\sqrt{2}}}=2$$

$$\alpha_2=2-2\rightarrow\boxed{\alpha_2=0}$$

;

$$\underbrace{\left(0,0\right)=\left(\beta_1\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\beta_1-\frac{\sqrt{2}}{2}\beta_2\right)}_{\text{Igualando términos:}}$$

$$\beta_1\sqrt{2}=0\quad;\quad\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}\beta_1}-\frac{\sqrt{2}}{2}\beta_2=0$$

$$\boxed{\beta_1=0}\quad;\quad\boxed{\beta_2=0}$$

$$\therefore\quad M_3=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}=M_B^B(T)\quad;\quad M_3^T=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad M_3^T=M_3$$

$\therefore$ "M_3" es simétrica

(e) M_1 no es simétrica
M_2 es simétrica
M_3 es simétrica

(f) $B_{canónica}=\{(\underbrace{1,0}_{u}),(\underbrace{0,1}_{v})\}$

$\left(\overline{u}|\overline{v}\right)=\left[(1,0)\,|\,(0,1)\right]=\cancel{(1)(0)}-(1)(1)-\cancel{(0)(0)}+\cancel{2(0)(1)}=\boxed{-1}\neq 0$ No es ortogonal

$\left(\overline{u}|\overline{u}\right)=\left[(1,0)\,|\,(1,0)\right]=(1)(1)-\cancel{(1)(0)}-\cancel{(1)(0)}+\cancel{2(0)(0)}=\boxed{1};\quad \|\overline{u}\|=1$

$\left(\overline{v}|\overline{v}\right)=\left[(0,1)\,|\,(0,1)\right]=\cancel{(0)(0)}-\cancel{(0)(1)}-\cancel{(0)(1)}+2(1)(1)=\boxed{2};\quad \|\overline{v}\|=\sqrt{2}$

No es ortonormal

$A=\left\{\overline{a_1}=(1,1),\overline{a_2}=(1,0)\right\}$

$\left(\overline{a_1}|\overline{a_2}\right)=\left[(1,1)\,|\,(1,0)\right]=(1)(1)-\cancel{(1)(0)}-(1)(1)+\cancel{2(1)(0)}=1-1=\boxed{0}\quad\therefore$ Es ortogonal

$\left(\overline{a_1}|\overline{a_1}\right)=\left[(1,1)\,|\,(1,1)\right]=\cancel{(1)(1)}-(1)(1)-\cancel{(1)(1)}+2(1)(1)=-1+2=\boxed{1};\quad \|\overline{a_1}\|=1$

$\left(\overline{a_2}|\overline{a_2}\right)=\left[(1,0)\,|\,(1,0)\right]=(1)(1)-\cancel{(1)(0)}-\cancel{(0)(1)}+\cancel{2(0)(0)}=\boxed{1};\quad \|\overline{a_2}\|=1$

Sí es ortonormal

$$B=\left\{\overline{b_1}=\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\overline{b_2}=\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

$$\left(\overline{b_1}|\overline{b_2}\right)=\left[\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\middle|\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=\cancel{\left(\sqrt{2}\right)(0)}-\left(\sqrt{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\cancel{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(0)}+\cancel{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\left(\overline{b_1}|\overline{b_2}\right)=\left(\sqrt{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(\sqrt{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\boxed{0}\quad\therefore$$ Es ortogonal

$$\left(\overline{b_1}|\overline{b_1}\right)=\left[\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\middle|\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sqrt{2}\right)+\cancel{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\left(\overline{b_1}|\overline{b_1}\right)=2-\cancel{2}\left(\sqrt{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right)+\left(\sqrt{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\cancel{2}-\cancel{2}+\frac{2}{2}=0+1=1$$

$$\left(\overline{b_1}|\overline{b_1}\right)=1\quad;\quad\boxed{\|\overline{b_1}\|=1}$$

$$\left(\overline{b_2}|\overline{b_2}\right)=\left[\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\middle|\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=\cancel{(0)(0)}-\cancel{(0)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}-\cancel{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(0)}+\cancel{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\left(\overline{b_2}|\overline{b_2}\right)=\left(\sqrt{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2}{2}=1;\quad\boxed{\|\overline{b_2}\|=1}\quad\therefore$$ Sí es ortonormal

Finalmente:

$B_{canónica}$ no es ortonormal → M_1 no es simétrica
A es ortonormal → M_2 es simétrica
B es ortonormal → M_3 es simétrica

(a) ¿El operador "T" es simétrico?

Condición: $T^*=T$ si y sólo si $A^*=A$

☞ Demostración con matrices asociadas:

$$\left[M_A^A(T)\right]^* = M_A^A(T)$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad \therefore \quad "T" \ \boxed{\text{Es simétrico}}$$

☞ Demostración con la regla de correspondencia de T^*:

$$M_A^A(T^*) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad M_A^A(T^*)\cdot(\bar{v})_A = \left[T^*(\bar{v})\right]_A \longleftarrow \quad (1)$$

Sea $\bar{v} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ como C.L de A= {(1,1), (1,0)}:

$$\bar{v} = \alpha(1,1) + \beta(1,0)$$

$$\underbrace{(x,y) = (\alpha+\beta, \alpha)} \longleftarrow \boxed{\text{Igualando términos}}$$

$$\alpha + \beta = x \quad ; \quad \boxed{\alpha = y}$$

$$\boxed{\beta = x - y} \quad \therefore \quad (\bar{v})_A = \begin{pmatrix} y \\ x-y \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en (1):

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{y} + x - \cancel{y} \\ \cancel{y} + x - \cancel{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \left[T^*(\bar{v})\right]_A$$

Finalmente:

$$T^*(\bar{v}) = x(1,1) + x(1,0) = (x+x, x)$$

$$\therefore \quad T^*(x,y) = (2x, x) \longleftarrow \boxed{\text{Regla de correspondencia del adjunto de “}T\text{”}}$$

Se demuestra que $\boxed{T^* = T}$

$T(x,y)=(2x,x)$

DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL

Problema 6: Sea el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ con producto interno complejo usual. Determinar la descomposición espectral, del operador lineal $T:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ cuya matriz asociada respecto a la base *B*= {(1,0),(0,1)} es : $A=\begin{pmatrix} 4 & 3i \\ 3i & 4 \end{pmatrix}$.

Solución: (a) $T^* \circ T = T \circ T^*$ $\leftarrow$ para que "*T*" sea operador normal

Puesto que $A^* \cdot A = A \cdot A^*$

$$A^* \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -3i \\ -3i & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3i \\ 3i & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16-9i^2 & \cancel{12i}-\cancel{12i} \\ -\cancel{12i}+\cancel{12i} & -9i^2+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} 4 & 3i \\ 3i & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3i \\ -3i & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16-9i^2 & -\cancel{12i}+\cancel{12i} \\ \cancel{12i}-\cancel{12i} & -9i^2+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ "*T*" es operador normal

$\Downarrow$

Por lo tanto, puede descomponerse en proyecciones ortogonales sobre sus espacios característicos

(b) Valores característicos:

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 3i \\ 3i & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = (4-\lambda)(4-\lambda) - 9i^2 = 0$$

$$16-4\lambda-4\lambda+\lambda^2+9=0$$

$$\boxed{\lambda^2-8\lambda+25=0}$$

$$\lambda = \frac{-(-8)\pm\sqrt{64-4(1)(25)}}{2(1)} = \frac{8\pm\sqrt{64-100}}{2} = \frac{8\pm\sqrt{-36}}{2}$$

$$\lambda = \frac{8\pm 6i}{2}$$

$\boxed{\lambda_1 = 4+3i}$; $\boxed{\lambda_2 = 4-3i}$ $\longleftarrow$ Valores característicos

(c) Vectores característicos:

Para $\boxed{\lambda_1 = 4+3i}$:

$\underbrace{(A-\lambda I)}\bar{v} = \bar{0}$; sea $\bar{v} = (x, y)$

$\begin{pmatrix} -3i & 3i \\ 3i & -3i \end{pmatrix} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

$$x - y = 0 \rightarrow \boxed{x = y}$$
$$0y = 0 \rightarrow \boxed{y = y}$$
$$\therefore \quad \bar{v} = (y, y)$$
$$E(\lambda_1) = \{(y, y) \mid y \in R\}$$

Para $\boxed{\lambda_2 = 4-3i}$:

$\underbrace{(A-\lambda I)}\bar{v} = \bar{0}$; sea $\bar{v} = (x, y)$

$\begin{pmatrix} 3i & 3i \\ 3i & 3i \end{pmatrix} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

$$x + y = 0 \rightarrow \boxed{x = -y}$$
$$0y = 0 \rightarrow \boxed{y = y}$$
$$\therefore \quad \bar{v} = (-y, y)$$
$$E(\lambda_2) = \{(-y, y) \mid y \in R\}$$

Verificando ortogonalidad de espacios característicos:

$$\left(E(\lambda_1) \middle| E(\lambda_2)\right) = \left[(1,1) \mid (-1,1)\right] = (1)(-1) + (1)(1) = \boxed{0}$$

$\therefore$ $E(\lambda_1)$ y $E(\lambda_2)$ son complementos ortogonales

(d) Por teorema: $\mathbb{C}^2$ es la suma directa de los espacios característicos de "T":

$$\mathbb{C}^2 = E(\lambda_1) + E(\lambda_2)$$
$$(x,y) = (a,a) + (-b,b)$$
$$\underbrace{(x,y) = (a-b, a+b)}$$

$$a-b=x \quad ; \quad \underbrace{a+b=y}$$
$$\boxed{a=x+b} \quad ; \quad x+b+b=y$$
$$a = x-\frac{x}{2}+\frac{y}{2}; \quad 2b=-x+y$$
$$\boxed{a=\frac{x+y}{2}} \quad ; \quad \boxed{b=\frac{-x+y}{2}}$$

Igualando términos

Por lo tanto, para ∀ $(x,y) \in \mathbb{C}^2$:

$$(x,y) = \underbrace{\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)}_{P_1} + \underbrace{\left(\frac{x-y}{2}, \frac{-x+y}{2}\right)}_{P_2} \leftarrow \text{Expresión única}$$

Así, las proyecciones ortogonales P_i sobre los espacios característicos $E(\lambda_i)$ son:

$$P_1(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$$
$$P_2(x,y) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{-x+y}{2}\right)$$

e) Finalmente, la descomposición espectral del operador "T" es:

$$T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$$
$$T = (4+3i)P_1 + (4-3i)P_2$$
$$T(x,y) = (4+3i)P_1(x,y) + (4-3i)P_2(x,y)$$
$$T(x,y) = (4+3i)\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) + (4-3i)\left(\frac{x-y}{2}, \frac{-x+y}{2}\right) \rightarrow \underbrace{\boxed{T = (4+3i)P_1 + (4-3i)P_2}}_{\text{Descomposición espectral de "}T\text{"}}$$