



**Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas
Coordinación de Matemáticas**



Álgebra Lineal

**“Antecedentes históricos
del Álgebra Lineal”**

*Dra. Norma Patricia López Acosta
Profesora de la Facultad de Ingeniería, UNAM*

*Con la colaboración de: Jesús Eduardo Martínez Martínez
Estudiante de la Facultad de Ingeniería, UNAM*

Ciudad Universitaria, México, D.F., febrero de 2010

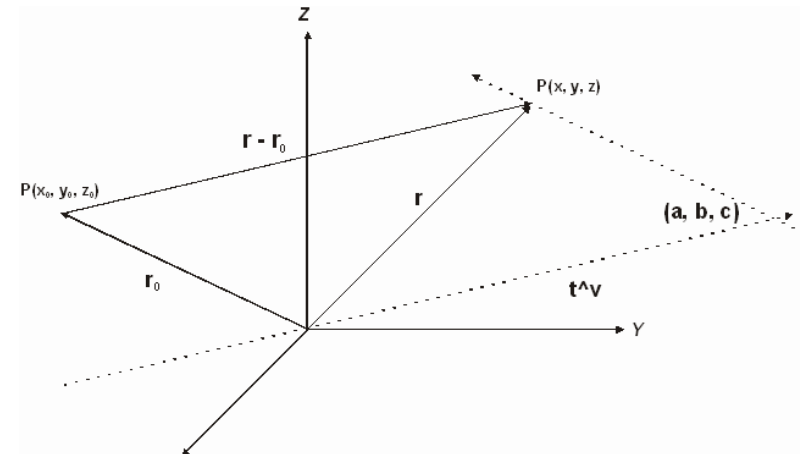
Definición



El **álgebra** es la rama de las matemáticas en la cual las operaciones aritméticas son generalizadas empleando números, letras y signos. Al igual que en la aritmética, las operaciones fundamentales del álgebra son adición, sustracción, multiplicación, división y cálculo de raíces.

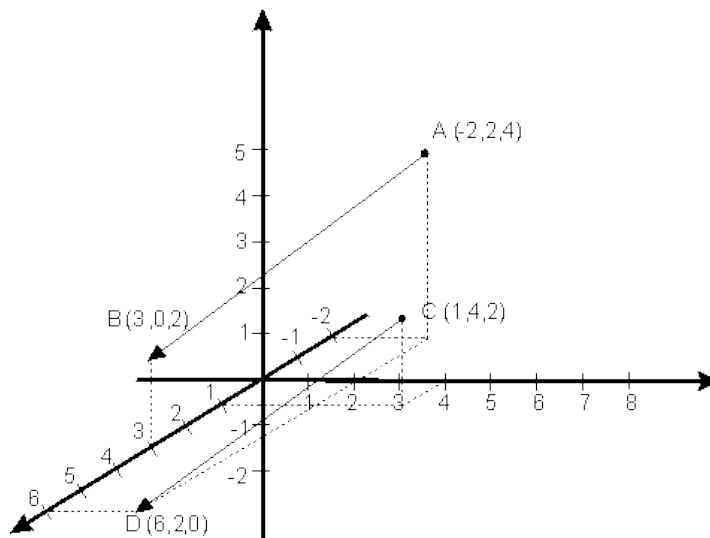
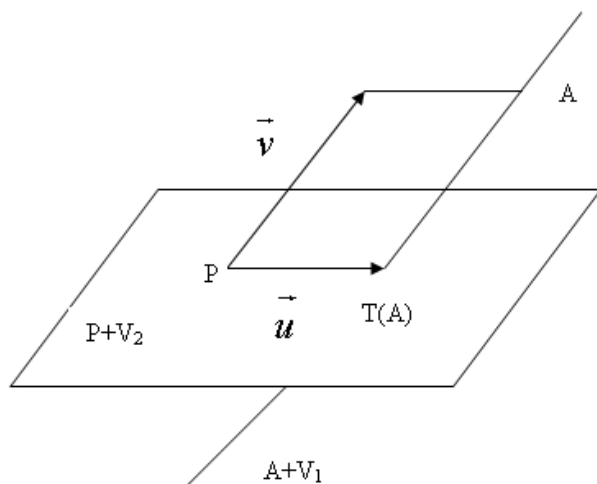
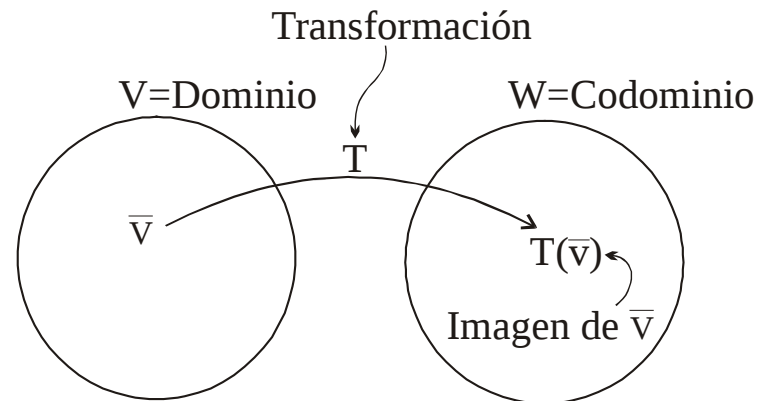
Si bien la palabra "**álgebra**" viene de la **palabra árabe** (al-Jabr), **sus orígenes se remontan a los antiguos babilonios**, quienes **desarrollaron un avanzado sistema aritmético con el que fueron capaces de hacer cálculos en una forma algebraica**. Con el uso de este sistema fueron capaces de aplicar las fórmulas y soluciones para calcular valores desconocidos. **Este tipo de problemas suelen resolverse hoy mediante ecuaciones lineales y ecuaciones cuadráticas.**

Por el contrario, la mayoría de los **egipcios** de esa época, así como la mayoría de los de la **India**, **griegos** y **chinos** matemáticos en el primer milenio antes de Cristo, normalmente **resolvían este tipo de ecuaciones por métodos geométricos**, tales como los descritos en los documentos matemáticos **Rhind Papyrus**, **Sulba Sutras**, **Elementos de Euclides**, y los **Nueve Capítulos sobre el Arte de las Matemáticas**.



El **álgebra lineal** es la rama de las matemáticas que estudia conceptos tales como **vectores**, **matrices**, **sistemas de ecuaciones lineales** y en un enfoque más formal, **espacios vectoriales** y **transformaciones lineales**.

Es un área activa que **tiene conexiones con muchas áreas dentro y fuera de las matemáticas**, como análisis funcional, ecuaciones diferenciales, investigación de operaciones, gráficas por computadora, campos de la ingeniería, por mencionar algunas.



$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

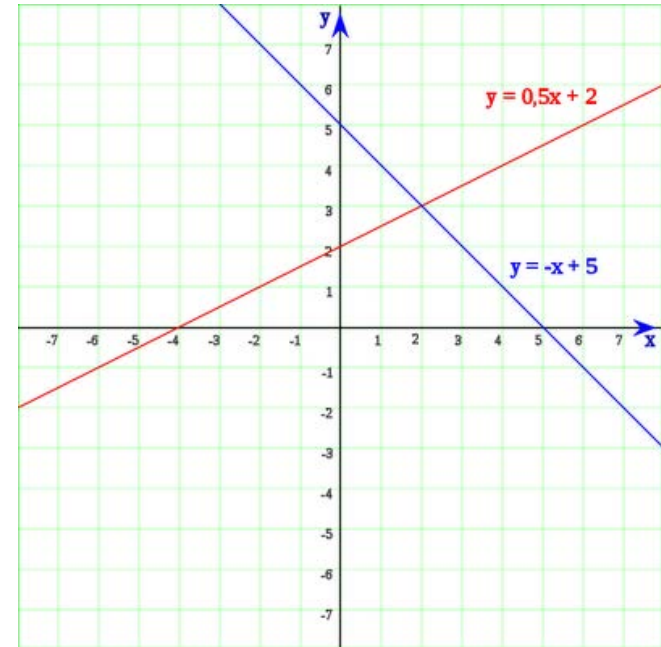
El hombre ha construido modelos que le han facilitado la tarea de resolver problemas concretos. Todo esto con el propósito de favorecer su forma de vida. Muchos de estos problemas tienen un carácter lineal, es decir, pueden plantearse mediante ecuaciones lineales con coeficientes en algún campo de números y con unas cuantas variables.

La palabra **ecuación** proviene del latín “*aequatio*” que significa igualdad. Así, una ecuación es una igualdad que contiene algunas cantidades desconocidas. En particular, una ecuación lineal es una ecuación de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

donde $a_1, a_2, \dots, a_n$ son los coeficientes; $x_1, x_2, \dots, x_n$ las variables y b el término constante.

Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto finito de ecuaciones lineales.



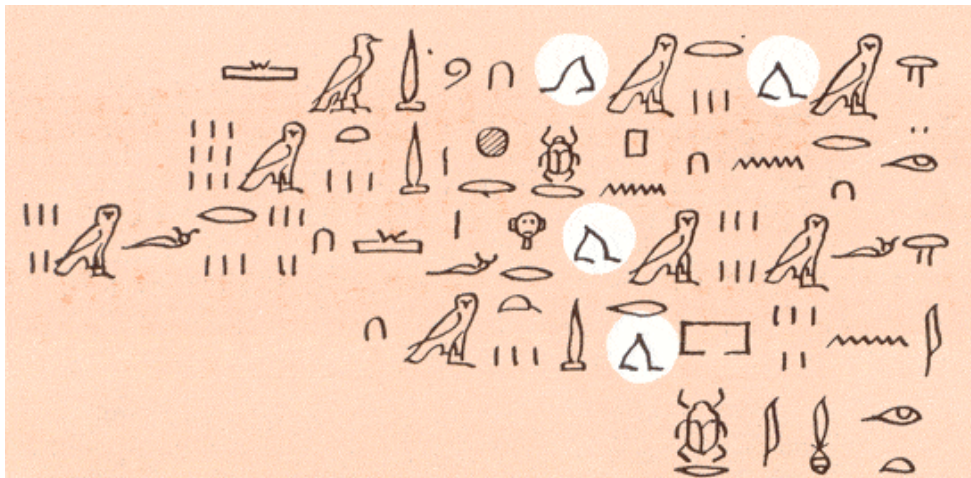
$$\begin{array}{l} x + y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{array}$$

Los primeros elementos de lo que hoy conocemos como *Álgebra lineal* se han encontrado en el **documento matemático más antiguo** que ha llegado hasta nuestros días: el **papiro Rhind**, conservado en el *British Museum* con algunos fragmentos en el *Brooklyn Museum*, y conocido también como el **Libro de Cálculo**, el cual fue escrito por el **sacerdote egipcio Ahmés hacia el año 1650 a.C.**

En este valioso documento se consideran las **ecuaciones de primer grado**, donde la incógnita aparece representada por un "ibis" que significa *escarbando en el suelo*, posiblemente por su primogénita aplicación a la agrimensura.



Papiro Rhind



Este problema es del papiro Rhind. Dice: « $\frac{2}{3}$ sumados y $\frac{1}{3}$ restados: hacen 10. Hallar $\frac{1}{10}$ de este 10: el resultado es 1: el resto, $9 \frac{2}{3}$ de 9, es decir, 6, se añaden; total, 15. Una tercera parte es 5. Era 5 lo que se había restado: resto, 10». Traducción: $x + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}(x + \frac{2}{3}x) = 10$. En el simbolismo egipcio, las piernas que andaban hacia la izquierda significaban «sumar», a la derecha «restar».

Por su parte, los **matemáticos chinos** durante los siglos III y IV a.C. continuaron la tradición de los babilonios y nos legaron los primeros métodos del **pensamiento lineal**.

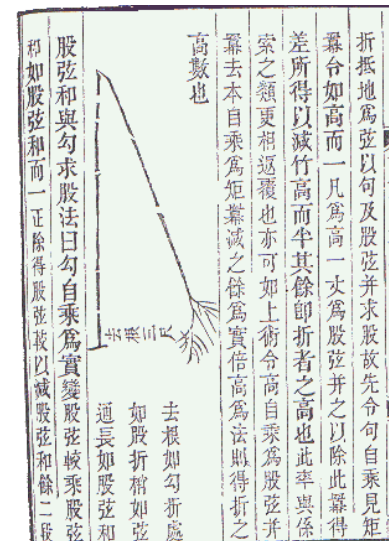
Esta obra **Nueve capítulos sobre el Arte Matemático** fue compuesta por el hombre de estado y científico Chuan Tsanong en el año 152 a.C. y en él se incluyeron sistemáticamente todos los conocimientos matemáticos de la época.

En el tratado **Nueve capítulos sobre el Arte Matemático**, publicado durante la Dinastía Han, aparece el siguiente **sistema lineal**:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

así como un **método para su resolución**, conocido como la **regla de "fan-chen"**, la que **en esencia**, es el conocido **método de eliminación gaussiana** de nuestros días.

Problemas del "Jiuzhang Suanshu"



Luego vendrían los aportes de los **matemáticos islámicos y europeos**, quienes siguieron cultivando el **pensamiento lineal**. Por ejemplo, **Leonardo de Pisa (1180-1250)**, mejor conocido como **Fibonacci**, en su obra ***Liber Quadratorum*** publicada en 1225, estudió el **sistema no lineal**:

$$\begin{cases} x^2 + a = y^2 \\ x^2 - a = z^2, \end{cases}$$

el cual es una generalización de un problema que le había propuesto Giovanni da Palermo.

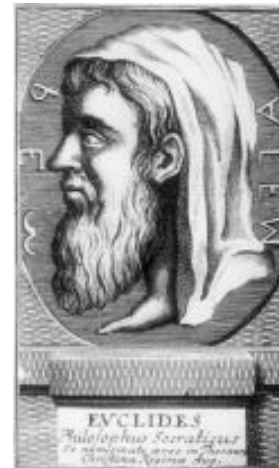


Los **matemáticos griegos**, por su parte, **no se preocuparon por los problemas lineales**. La **solución general de la ecuación de segundo grado** aparece en el tratado ***Los elementos de Euclides***.



Libros

I - II - III - IV - V - VI - VII - VIII - IX - X - XI - XII - XIII



Génesis de los números complejos



Dos eventos cruciales en el desarrollo del álgebra lineal son: el **descubrimiento del sistema de los números complejos**, como una extensión del sistema $\mathbb{R}$ y la primera prueba del llamado **teorema fundamental del álgebra**, el cual afirma que cada polinomio no constante con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja.

El **precursor de los números complejos** fue el doctor en medicina, astrólogo, filósofo y matemático milanés **Girolamo Cardano** (1501-1576).



Girolamo Cardano
(1501-1576)

$$\rightarrow a + \sqrt{-b} \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$



Los ***casus irreducibilis*** de Cardano son los números imaginarios de nuestros días.

Hasta el **siglo XVIII** el álgebra era, esencialmente, el arte de resolver ecuaciones de grado arbitrario. El matemático y filósofo francés, y uno de los iniciadores de la *Enciclopedia*, **D'Alembert** descubre que las **soluciones de un sistema $Ax=b$** forman una **variedad lineal**. Asimismo, **Euler**, **Lagrange** y el propio **D'Alembert** se dan cuenta que la **solución general del sistema homogéneo $Ax = 0$** es una **combinación lineal** de algunas soluciones particulares.

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

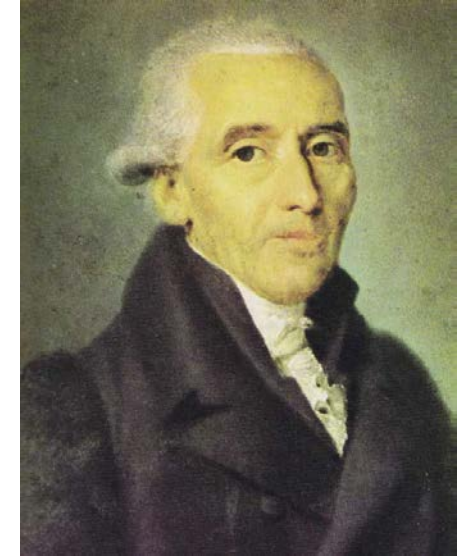
$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$



D'Alembert



Euler



Lagrange

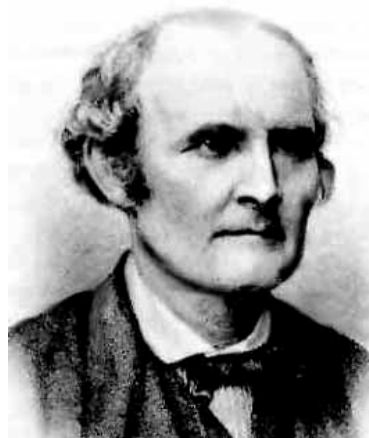
En esa época aparecen con **Hamilton**, **Arthur Cayley** (1821-1895) y **Hermann Gunther Grassmann** (1809-1877) las nociones de vector y de espacio vectorial, como una axiomatización de la idea de "vector" manejada por los estudiosos de la Mecánica desde fines del siglo XVII. Además, considerado el maestro del álgebra lineal, **Grassmann** introduce el **producto geométrico** y **lineal**, siendo el primero de éstos equivalente a nuestro *producto vectorial*. Asimismo, introduce las nociones de independencia lineal de un conjunto de vectores, así como de la dimensión de un espacio vectorial, y prueba la clásica identidad:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

Para cada par de subespacios U y W de un espacio vectorial.



Hamilton



Arthur Cayley

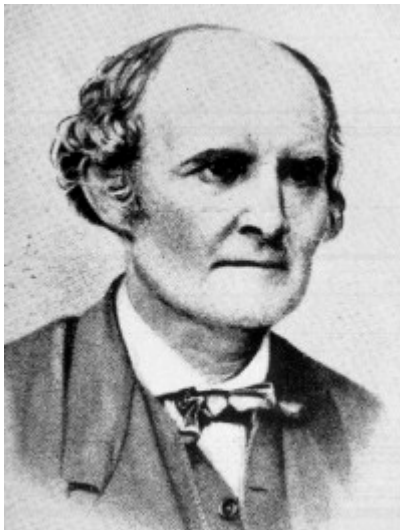


Hermann Grassmann

Álgebra de matrices



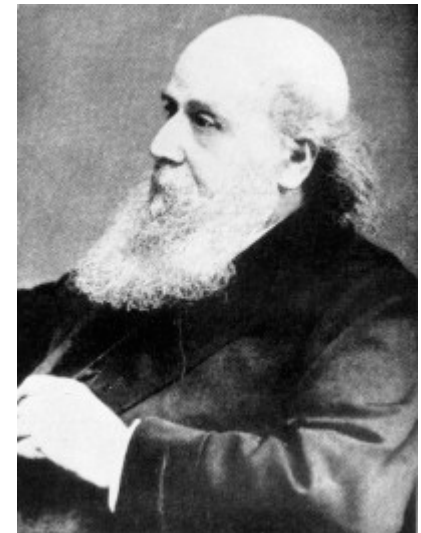
El primero en usar el término “**matriz**” fue el matemático inglés **James Joseph Sylvester** (1814-1897) en 1850, quien definió una matriz como un “**oblong arrangement of terms**” (**arreglo cuadrilongo de términos**). Sylvester establece contacto con **Cayley**, quien rápidamente entendería la importancia del concepto de matriz y por el año de 1853 publica una nota en donde aparece por primera vez la **inversa de una matriz**. Más tarde, en 1858, publica su **Memoir on the theory of matrices**, la cual contiene la primera definición abstracta de matriz. Asimismo, **Cayley** desarrolla el **álgebra matricial** definiendo las operaciones básicas de suma, multiplicación y multiplicación por escalares, así como la inversa de una matriz invertible.



Cayley

Álgebra matricial

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 0+0 & 1+1 \\ 3+1 & 0+2 & 0+1 \\ 5+1 & 1+1 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A - B = \begin{pmatrix} 2-1 & 0-0 & 1-1 \\ 3-1 & 0-2 & 0-1 \\ 5-1 & 1-1 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



James Joseph Sylvester



Orígenes del determinante



Cardano en su “*Ars Magna*” muestra una regla para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, a la cual llama “*regula de modo*”, y que en esencia es la conocida regla de cramer para la solución de sistemas de 2×2 .

Los inicios de la teoría de determinantes de matrices datan del siglo II a.C. con los matemáticos chinos. La idea de determinante apareció en Japón y Europa casi al mismo tiempo. En Japón, **Takakasu Seki Kowa (1642-1708)** fue el primero en publicar un trabajo sobre este tema. En 1683 **Seki** escribió el manuscrito “*Método de resolver los problemas disimulados*”, en el que sin contar con un término que corresponda a la idea de determinante, introduce los determinantes y proporciona métodos generales para calcularlos, siendo capaz de calcular el determinante de matrices cuadradas hasta de orden 5.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), en un artículo sobre mecánica publicado en 1773, menciona por primera vez la interpretación de determinante como un volumen. En efecto, se demuestra que el tetraedro formado por el origen $O(0,0,0)$ y los tres puntos $M(x,y,z)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$ y $M_2(x_2,y_2,z_2)$ tiene volumen:

$$\frac{1}{6} [z(x_1y_2 - y_1x_2) + z_1(yx_2 - xy_2) + z_2(xy_1 - yx_1)]$$

Este resultado también es atribuido a Grassmann, quien prueba que el determinante del arreglo:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

representa el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores fila.

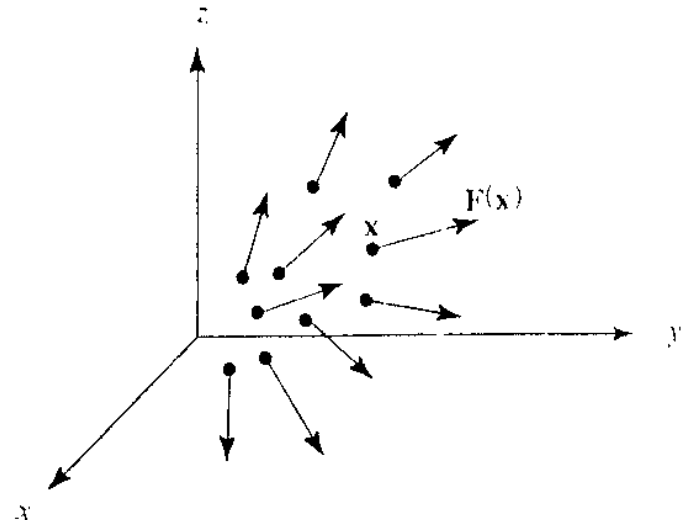
Estructuras algebraicas y álgebra de matrices

En álgebra abstracta, la teoría de grupos estudia las estructuras algebraicas conocidas como grupos. Sus objetivos son, entre otros, la clasificación de los grupos, sus propiedades y sus aplicaciones tanto dentro como fuera de las matemáticas. Las raíces históricas de la teoría de grupos son la teoría de las ecuaciones algebraicas, la teoría de números y la geometría.

Siendo todavía estudiante del Louis-le-Grand, **Galois** logró publicar su primer trabajo (una demostración de un teorema sobre fracciones continuas periódicas) y poco después dió con la clave para resolver un problema que había tenido en jaque a los matemáticos durante más de un siglo (las condiciones de resolución de ecuaciones polinómicas por radicales). Sin embargo, sus avances más notables fueron los relacionados con el desarrollo de una teoría nueva cuyas aplicaciones desbordaban con mucho los límites de las ecuaciones algebraicas: la teoría de grupos.



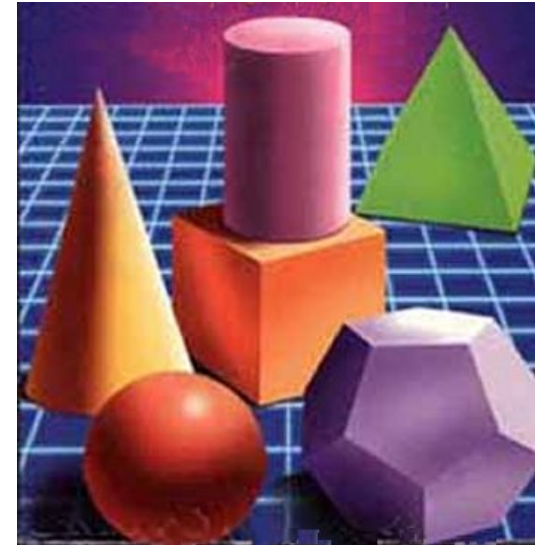
Galois



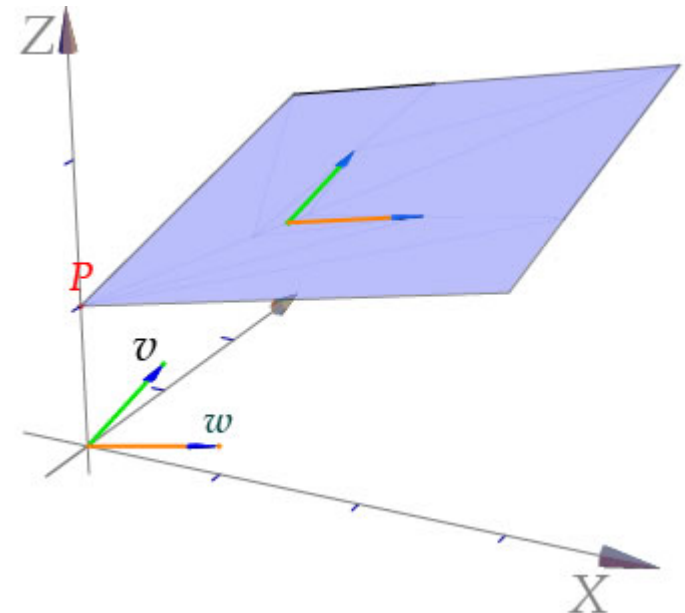


Algunas aplicaciones del álgebra lineal

- En geometría analítica, los **determinantes** desempeñan un papel básico en el **cálculo de áreas y volúmenes**, y en la formulación de ecuaciones de objetos geométricos como rectas, círculos, elipses, parábolas, planos y esferas.



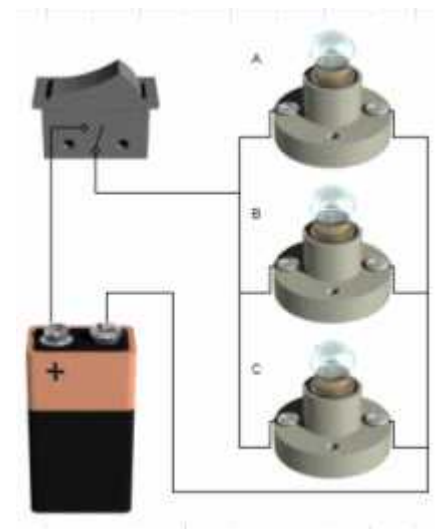
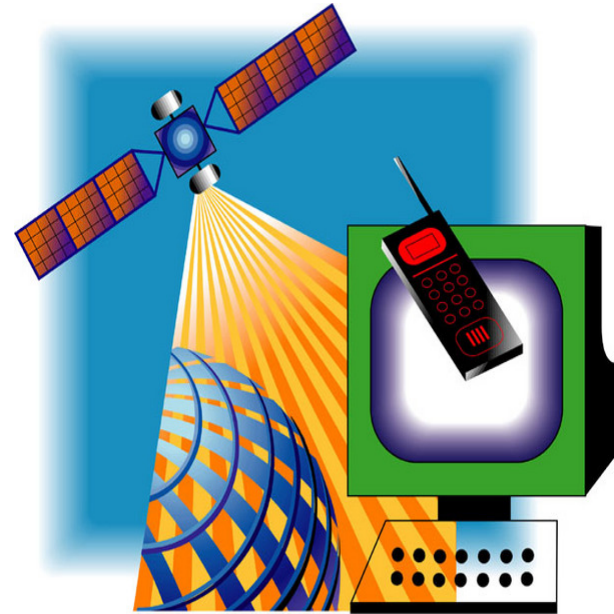
- Para los **vectores** existe un gran número de aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas, la física y la ingeniería. Una de las principales, es la **aplicación geométrica de los vectores en la estática y en la ingeniería**. Pero también se pueden aplicar para la obtención de mejores datos y así obtener graficas más suaves, etc.



- Las **matrices** se emplean en el estudio de las gráficas. La programación sencilla de operaciones matriciales en computadora permite estudiar el comportamiento de gráficas muy grandes. Por ejemplo, **en las redes telefónicas** una gráfica puede tener decenas de miles de nodos.

- En **electrónica**, la ley de ohm en otras palabras dice que en un gráfico de I en función de V se obtiene de una recta que pasa por el origen con pendiente R , todo elemento que no cumpla con esa regla no se les llama óhmicos.

- En **teoría de circuitos**, o análisis de modelos circuitales se hace uso de la **resolución de ecuaciones de n variables y n incógnitas** al aplicar el método de mallas o nodos.





Aplicaciones



- El Álgebra lineal tiene muchas aplicaciones en la ingeniería civil, por ejemplo en el diseño estructural de edificios en donde cada nodo de la estructura es un valor de la matriz que puede ser de orden $n \times n$.
- También se utiliza en la planeación, como en ingeniería de sistemas en donde cada variable se coloca en un elemento de la matriz.
- Tiene aplicaciones en geotecnia y en mecánica de fluidos, etc.



