



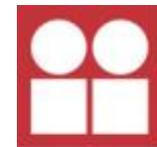
Facultad de Ingeniería  
División de Ciencias Básicas  
Coordinación de Matemáticas



## Importancia del Álgebra Lineal en la ingeniería

“Modelado numérico de problemas de flujo de agua y su relación con el Álgebra Lineal”

**Dra. Norma Patricia López Acosta**  
Profesora de la Facultad de Ingeniería, UNAM  
Investigadora del Instituto de Ingeniería, UNAM



**INSTITUTO  
DE INGENIERÍA  
UNAM**



# Contenido de la Presentación



1. Antecedentes sobre flujo de agua en suelos
  
2. Aplicaciones y su relación con el álgebra lineal
  - 2.1 Método de elementos finitos (MEF)
    - 👉 Solución de sistemas de ecuaciones lineales matriciales
  
  - 2.2 Método de los paseos casuales (caminatas aleatorias)
    - 👉 Representación de caminatas 3D en un plano 2D
  
  - 2.3 Transformación o mapeo conforme
    - 👉 Transformaciones lineales



# 1. Antecedentes sobre flujo de agua en suelos



# Objetivos de un análisis de flujo de agua



Para tratar de garantizar la seguridad de una estructura y evitar alguno de los siguientes problemas:

- **Pérdidas de agua**

- Por el flujo a través de una presa y su cimentación.
- Por el flujo en una laguna artificial.
- Por el flujo en un vaso de almacenamiento, etc.

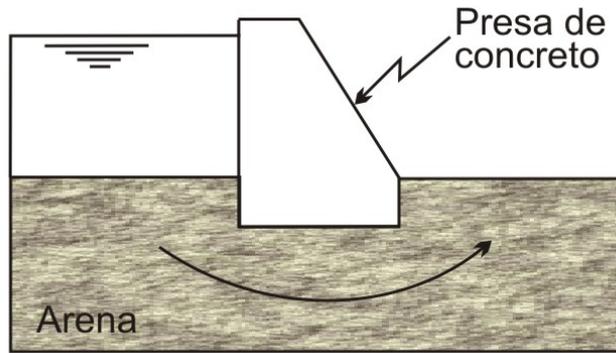
- **Altas presiones de agua**

Tienden a ocasionar **volteo** o **flotación** de las estructuras apoyadas en el suelo

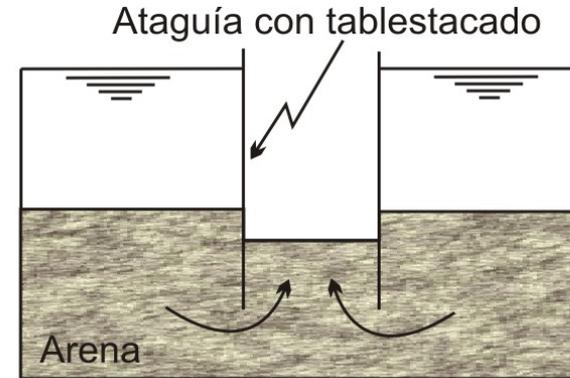
- **Altos gradientes hidráulicos**

Pueden ocasionar la falla local (**tubificación**) e incluso la falla total de la estructura soportada por el suelo

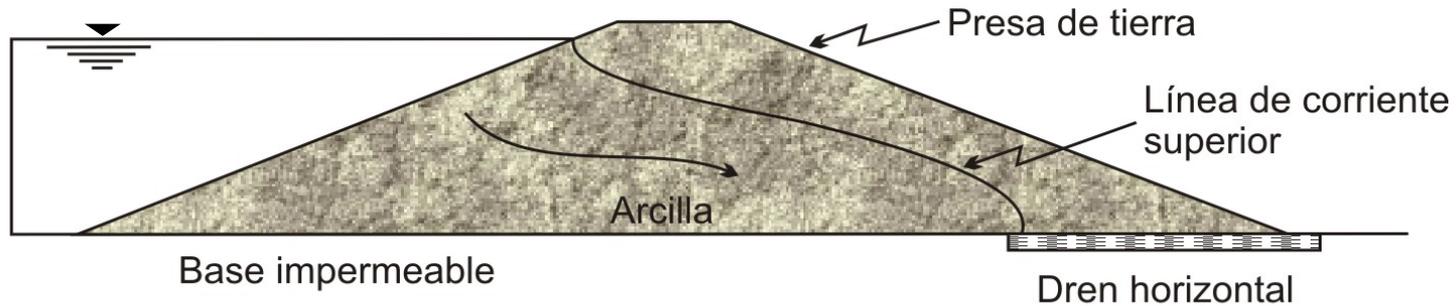
# Problemas típicos de flujo de agua



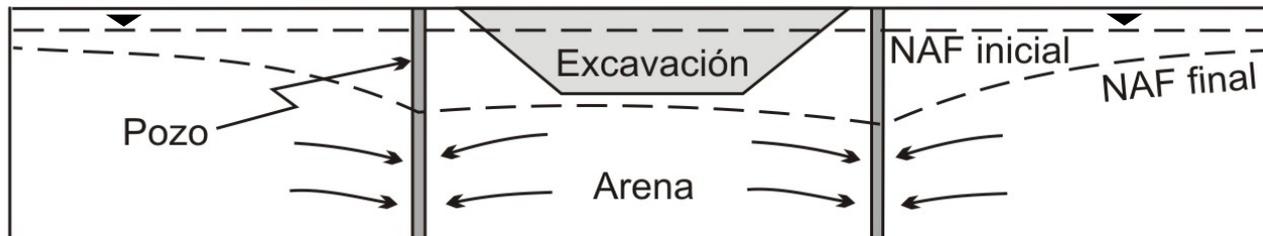
**(a) Flujo bajo la cimentación de presas de concreto**



**(b) Flujo bajo ataguías con tablestacado**

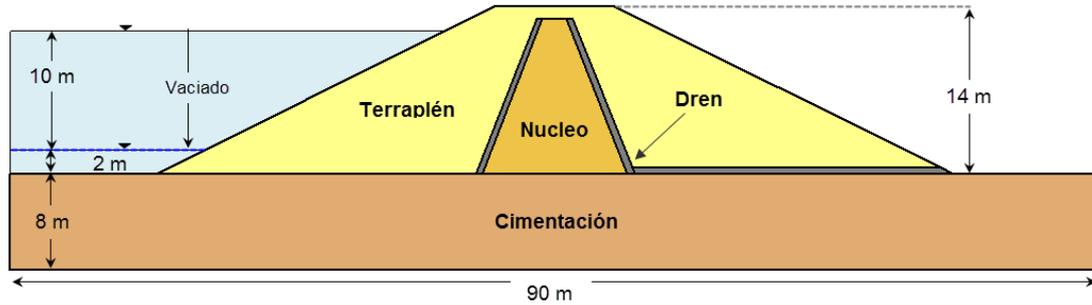


**(c) Flujo a través de presas de tierra**



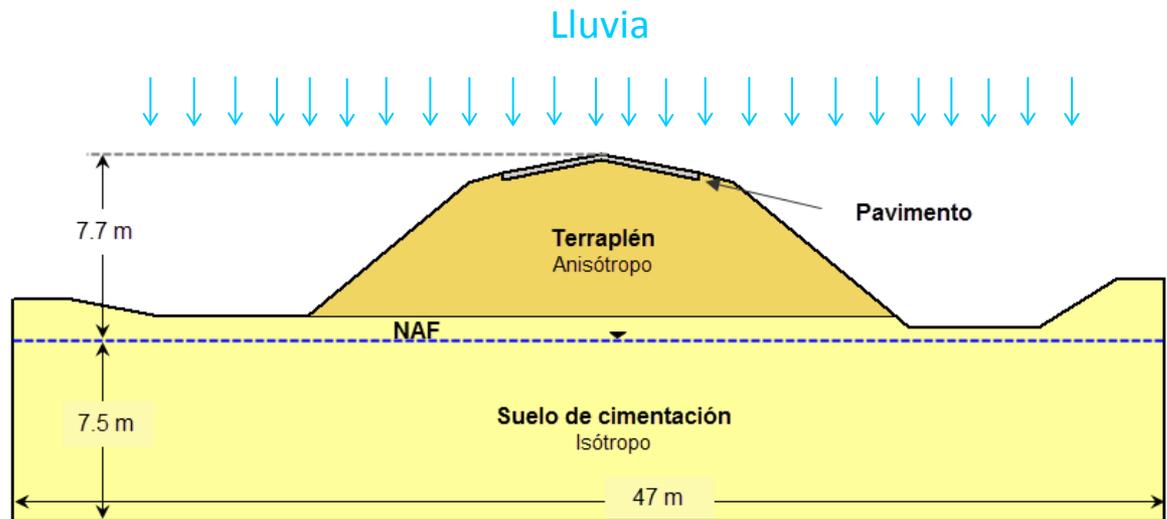
**(d) Flujo hacia pozos**





(f) Flujo transitorio en una presa de materiales graduados ocasionado por *vaciado de agua*

(g) Flujo transitorio en un terraplén ocasionado por *lluvia*

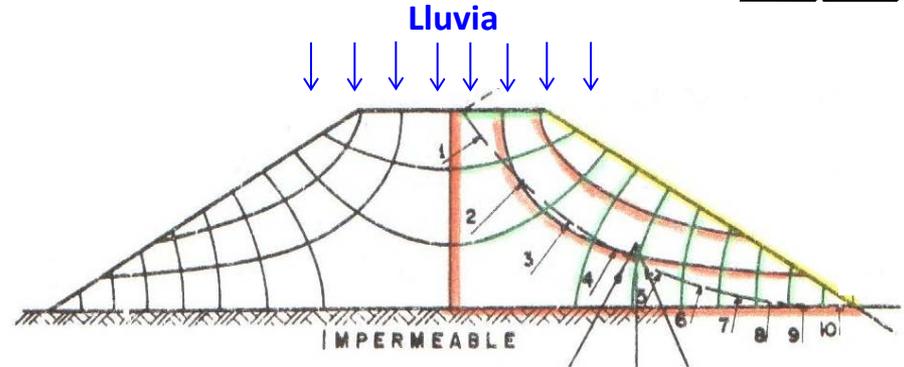
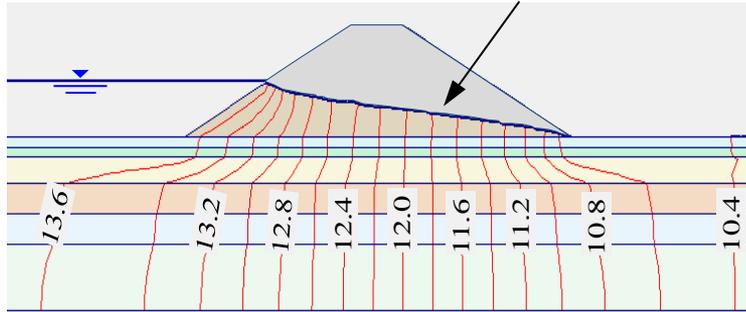




# Problemas de flujo de agua en bordos

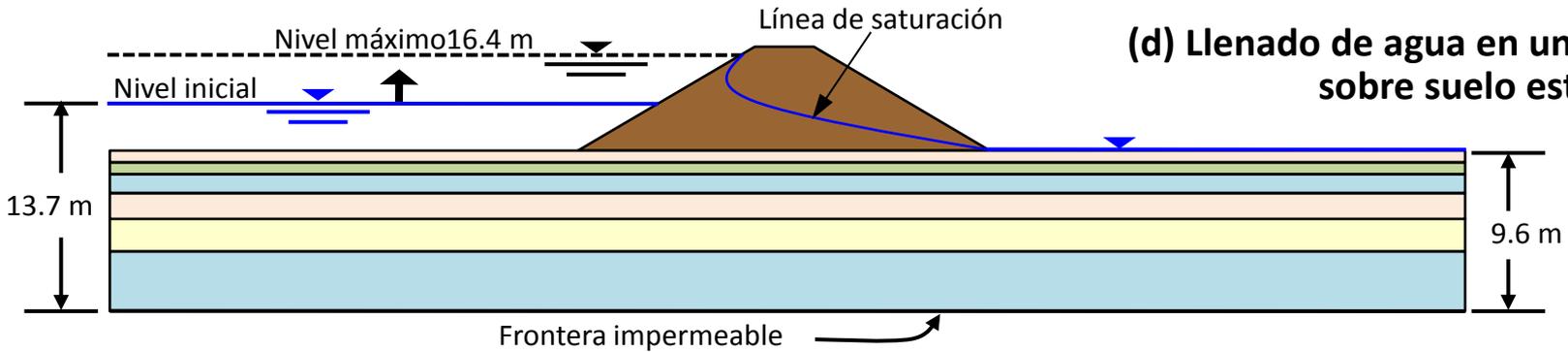


Línea de corriente superior



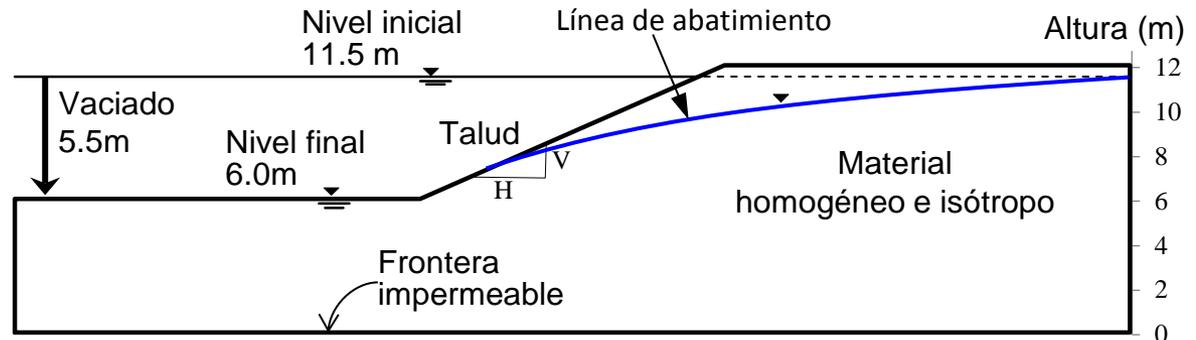
- (a) Flujo establecido a través de bordos o terraplenes y su cimentación

(b) Saturación de bordos o terraplenes por lluvia



(d) Llenado de agua en un terraplén sobre suelo estratificado

(c) Vaciado de agua en un terraplén homogéneo





# Flujo establecido y transitorio



- **Flujo establecido o estacionario**

Aquél en el que sus características no varían con el tiempo

- **Flujo transitorio**

Quando las características del flujo varían en función del tiempo



- Saturación de las bases de los pavimentos (por lluvias, etc.)

- Vaciado y llenado rápido de presas, bordos, diques, etc.

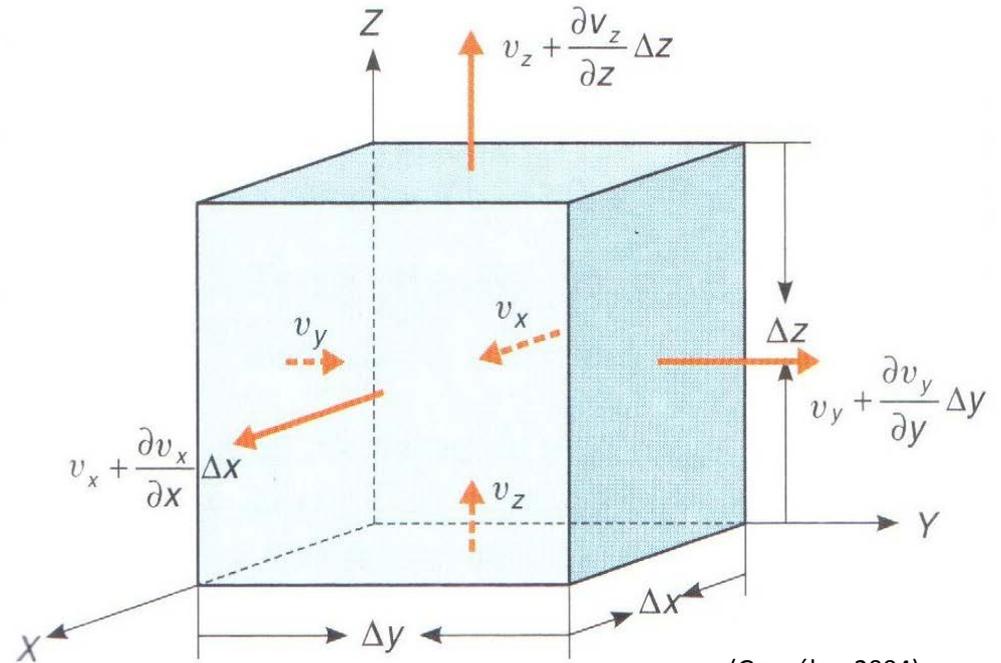


# Ecuación de *Laplace* (flujo establecido)



Hipótesis:

Gasto que entra = Gasto que sale



(González, 2004)



# Ecuación de *Laplace* (flujo establecido)



A partir de ecuación de *continuidad de flujo* y *ley de Darcy*:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{Continuidad})$$

$$v_x = -k_x \frac{\partial h}{\partial x} \quad ; \quad v_y = -k_y \frac{\partial h}{\partial y} \quad ; \quad v_z = -k_z \frac{\partial h}{\partial z} \quad (\text{Darcy}^*)$$

**Velocidad (de Darcy) = Permeabilidad × Gradiente hidráulico**

\*El signo negativo indica que la carga hidráulica disminuye en la dirección del flujo.

Sustituyendo *ley de Darcy* en la ecuación de *Continuidad*:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( -k_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0$$

**Medio homogéneo**



La permeabilidad es la misma en cualquier punto del espacio.

**Medio isótropo**



La permeabilidad es la misma en cualquier dirección del espacio.

**Se cumple bajo las siguientes hipótesis:**

- El flujo es establecido
- El suelo está saturado
- El agua y las partículas sólidas son incompresibles
- El flujo no modifica la estructura del suelo en ninguna forma

$$k_x = k_y = k_z = k$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$



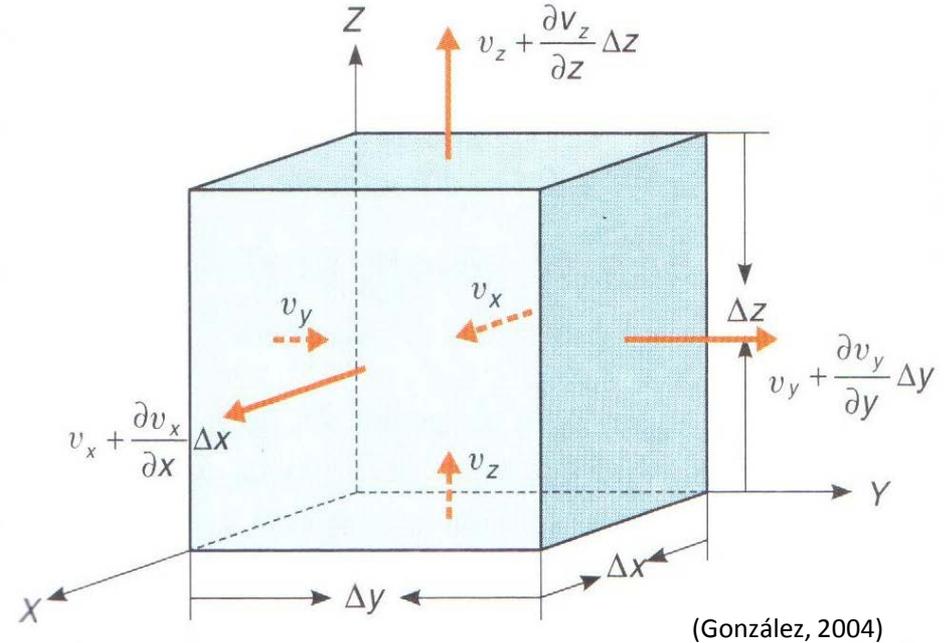
**Ecuación de Laplace** (flujo establecido; medio homogéneo e isótropo; y ausencia de fuentes –inyección o extracción–)



# Ecuación para **flujo transitorio**



Los niveles de agua van variando, y en consecuencia se va **almacenando** o '**desalmacenando**' agua en el medio



## Hipótesis:

Gasto que sale = Gasto que entra – Gasto *desalmacenado* en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ .

ó

Gasto que sale = Gasto que entra + Gasto *almacenado* en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ .



# Ecuación para flujo transitorio bidimensional



PLAXFLOW  
(Delft University of  
Technology 2007)

Flujo transitorio en un medio anisótropo y homogéneo:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + c \frac{\partial h}{\partial t} = Q$$

Término fuente  
(recarga o extracción)

Capacidad efectiva  
(depende de la porosidad  
y del grado de saturación)

Variación de niveles  
de agua respecto al  
tiempo

Donde:

$$h = y \left( - \frac{P}{\gamma_w} \right)$$

Ley de Bernoulli

$$h_p = - \frac{P}{\gamma_w}$$

Carga de presión

$$c = c_{sat} + n \frac{dS(h_p)}{dh_p}$$

Tensor de permeabilidad efectiva  $K$ :

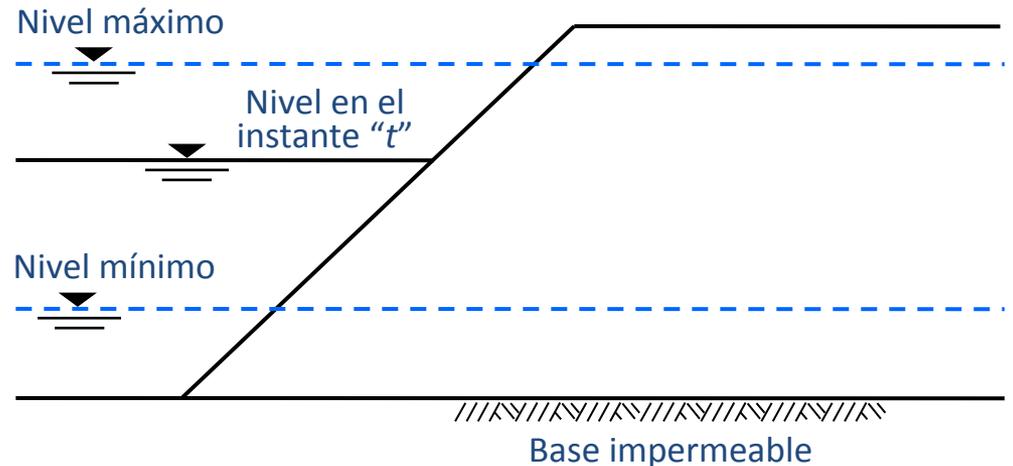
$$K = K_{rel}(S) \cdot K_{sat}$$

Donde:

$K_{rel}$  = Permeabilidad relativa

$K_{sat}$  = Permeabilidad saturada

$S$  = Saturación

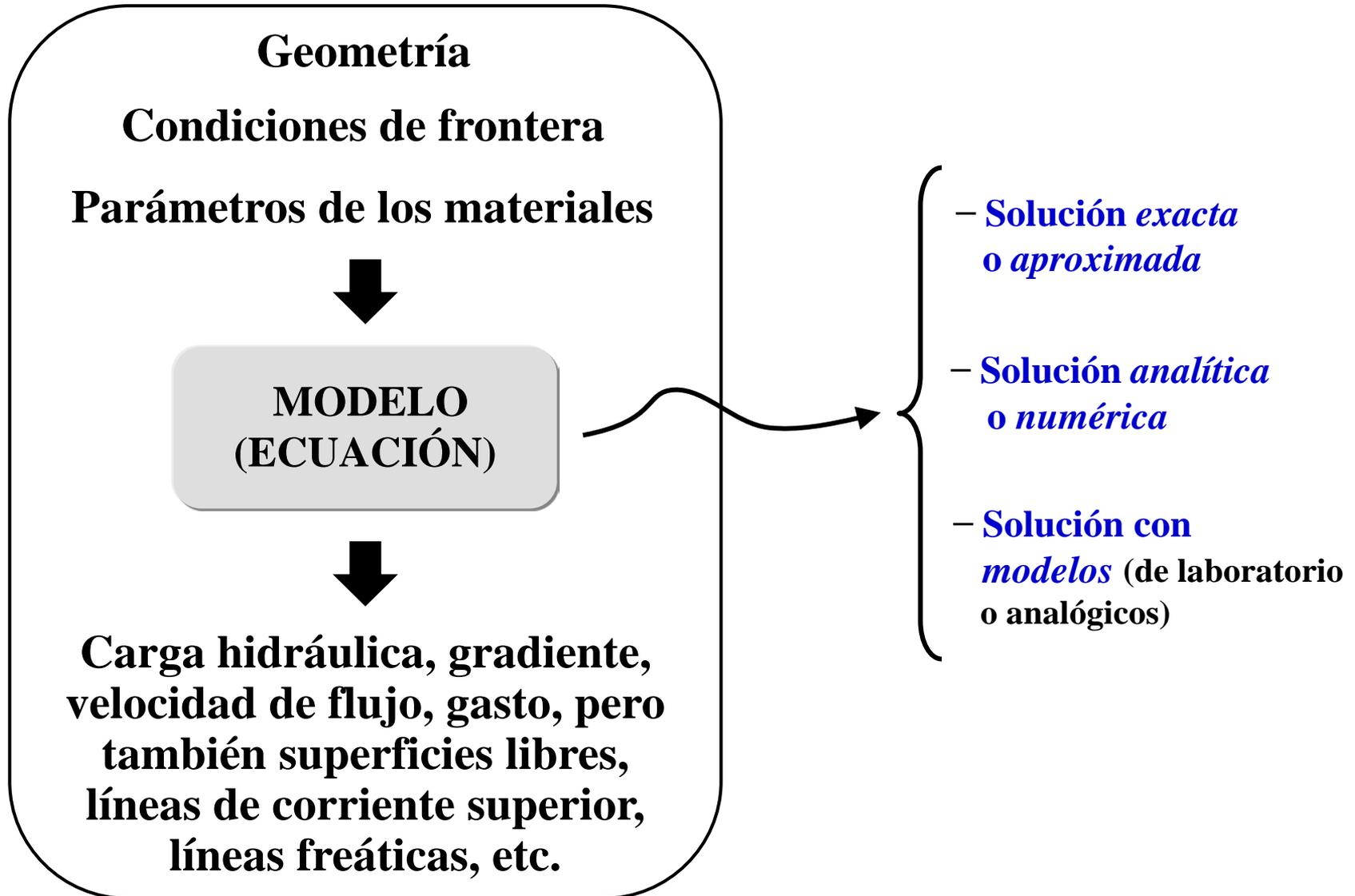




# Metodología general de análisis



## Flujo **establecido** o **transitorio**





# Métodos usuales de análisis



## Flujo establecido

- Solución analítica de la ecuación de Laplace
- Solución gráfica (red de flujo)
- Diferencias finitas (método de relajaciones)
- Método de los paseos casuales
- Método de los fragmentos
- Transformación o mapeo conforme
- Método de elementos de frontera (ecuaciones integrales)
- Método de elementos finitos (MEF)
- Modelos de laboratorio
- Modelos analógicos

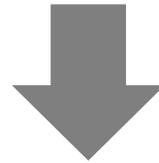
## Flujo transitorio

- Solución analítica de la ecuación diferencial parcial
- Solución gráfica (redes de flujo transitorias)
- Diferencias finitas (FDM)
- Método de elementos finitos (FEM)
- Modelos de laboratorio



## 2. Algunas aplicaciones y su relación con el álgebra lineal

# 2.1 Método de elementos finitos (MEF)



Solución de sistemas de ecuaciones lineales matriciales

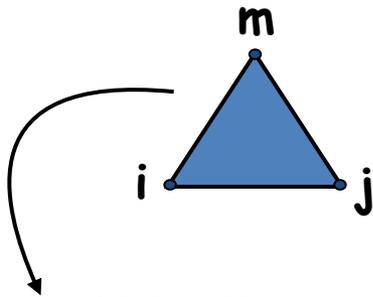


**Ecuación de Laplace:**

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

- Técnica numérica que proporciona soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales parciales para resolver problemas de campo determinados
- Versátil respecto a otros métodos: anisotropía, heterogeneidad y múltiples condiciones de frontera

## Elementos finitos triangulares:

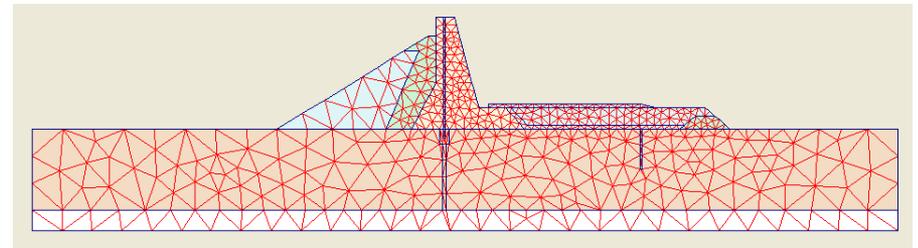
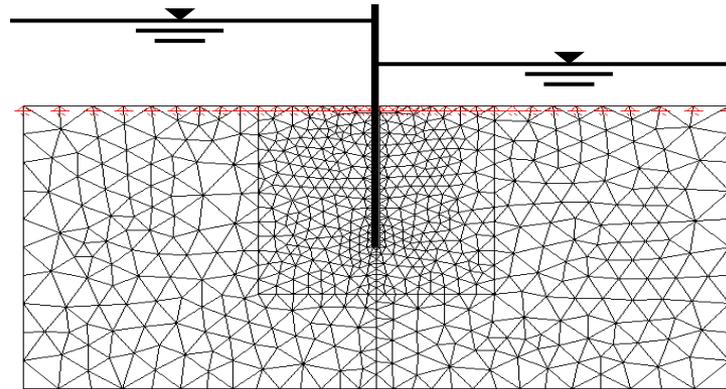


La carga hidráulica varía linealmente dentro de cada elemento finito:

$$h = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$



$$\{h\} = \frac{1}{2\Delta} \begin{Bmatrix} N_i & N_j & N_m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} h_i \\ h_j \\ h_m \end{Bmatrix}$$



Donde:

$$\Delta = \frac{1}{2} (x_i b_j + x_j b_i + x_m b_m)$$

Área del elemento finito

$$N_i = a_i + b_i x + c_i y$$

$$N_j = a_j + b_j x + c_j y$$

$$N_m = a_m + b_m x + c_m y$$

Funciones de forma

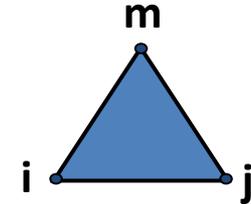


# Método de elementos finitos (Flujo establecido 2D)



**Ecuación de Laplace 2D:**

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$



**Resolución con enfoque variacional:**

$$\chi = \iint_D \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \partial h / \partial x \\ \partial h / \partial y \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial h / \partial x \\ \partial h / \partial y \end{Bmatrix} dx dy \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \chi}{\partial h_i} = 0$$

$$\left\{ \frac{\partial \chi^e}{\partial h} \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \chi^e}{\partial h_i} \\ \frac{\partial \chi^e}{\partial h_j} \\ \frac{\partial \chi^e}{\partial h_m} \end{Bmatrix} = [S]^e \{h\}^e ;$$

Donde:

$$[S]^e = \frac{1}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_m & c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix}$$

$$[S]^e = \frac{1}{4\Delta} [B]^T [R] [B]$$

Matriz general

**Sistema de ecuaciones lineales homogéneo:**

**Carga hidráulica**

$$[S] \{h_r\} = 0 ;$$

**Función de corriente**

$$[S] \{\psi_r\} = 0$$

↓  
 $q = \psi_1 - \psi_2 = cte$



## Ecuación de Laplace 2D:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$



Solución aproximada con enfoque variacional  
(Método de elementos finitos)



## Sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

Carga hidráulica

Función de corriente

$$[S]\{h_r\} = 0$$

;

$$[S]\{\psi_r\} = 0$$

¿ $h_r$ ?

¿ $\psi_r$ ?

Método de  
eliminación  
gaussiana



Curvas de isovalores

- 1) Líneas equipotenciales:  $h_r = \text{constante}$
- 2) Líneas de corriente o de flujo:  $\psi_r = \text{constante}$

➡ Dibujar redes de flujo

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

**Ecuación de Laplace**

Se cumple bajo las siguientes hipótesis:

- El flujo es establecido
- El suelo está saturado
- El agua y las partículas sólidas son incompresibles
- El flujo no modifica la estructura del suelo en ninguna forma [ausencia de fuentes: inyección o extracción]

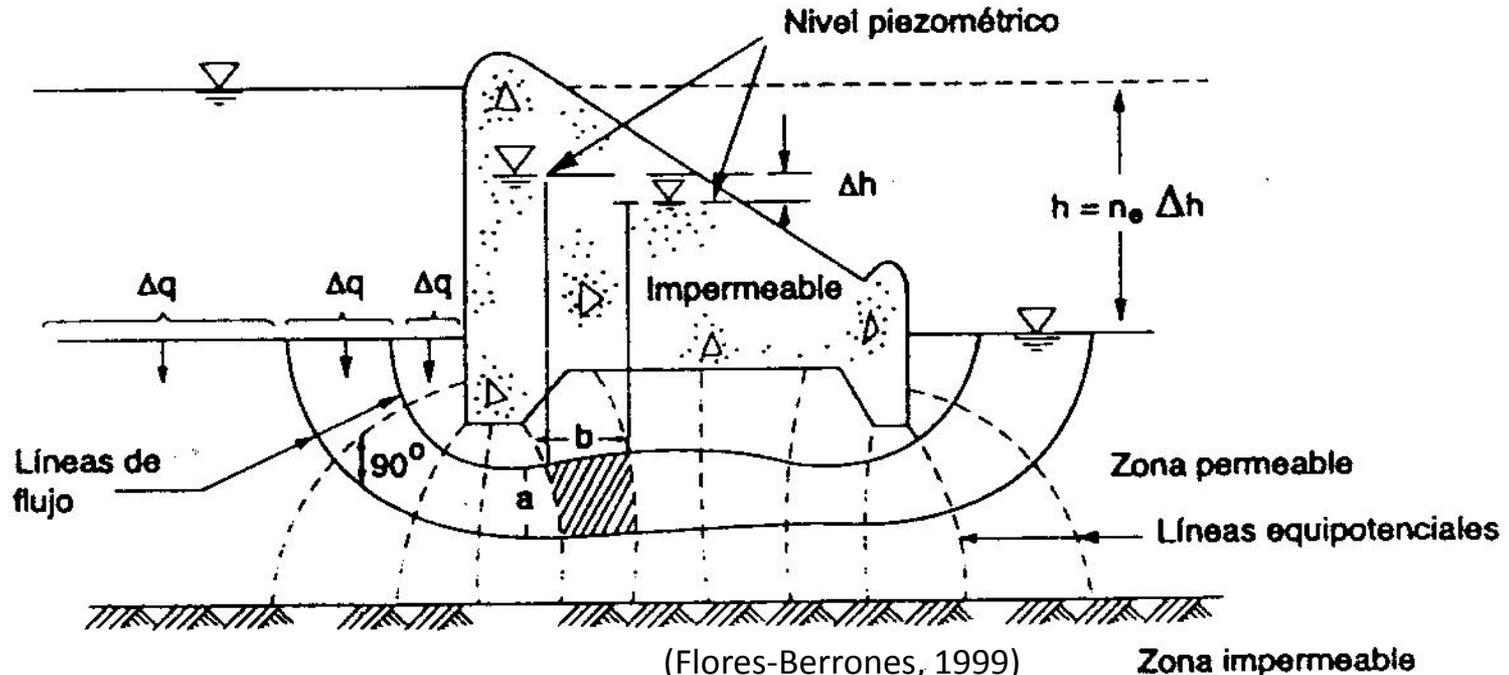
• La solución aproximada de la ecuación de Laplace se representa gráficamente mediante dos familias de curvas mutuamente ortogonales:

1) Líneas equipotenciales:  **$h = \text{constante}$**

**Gasto:**

$$q = k h \left( \frac{n_f}{n_e} \right) = k h S$$

2) Líneas de corriente o de flujo:  **$y = \text{constante}$**





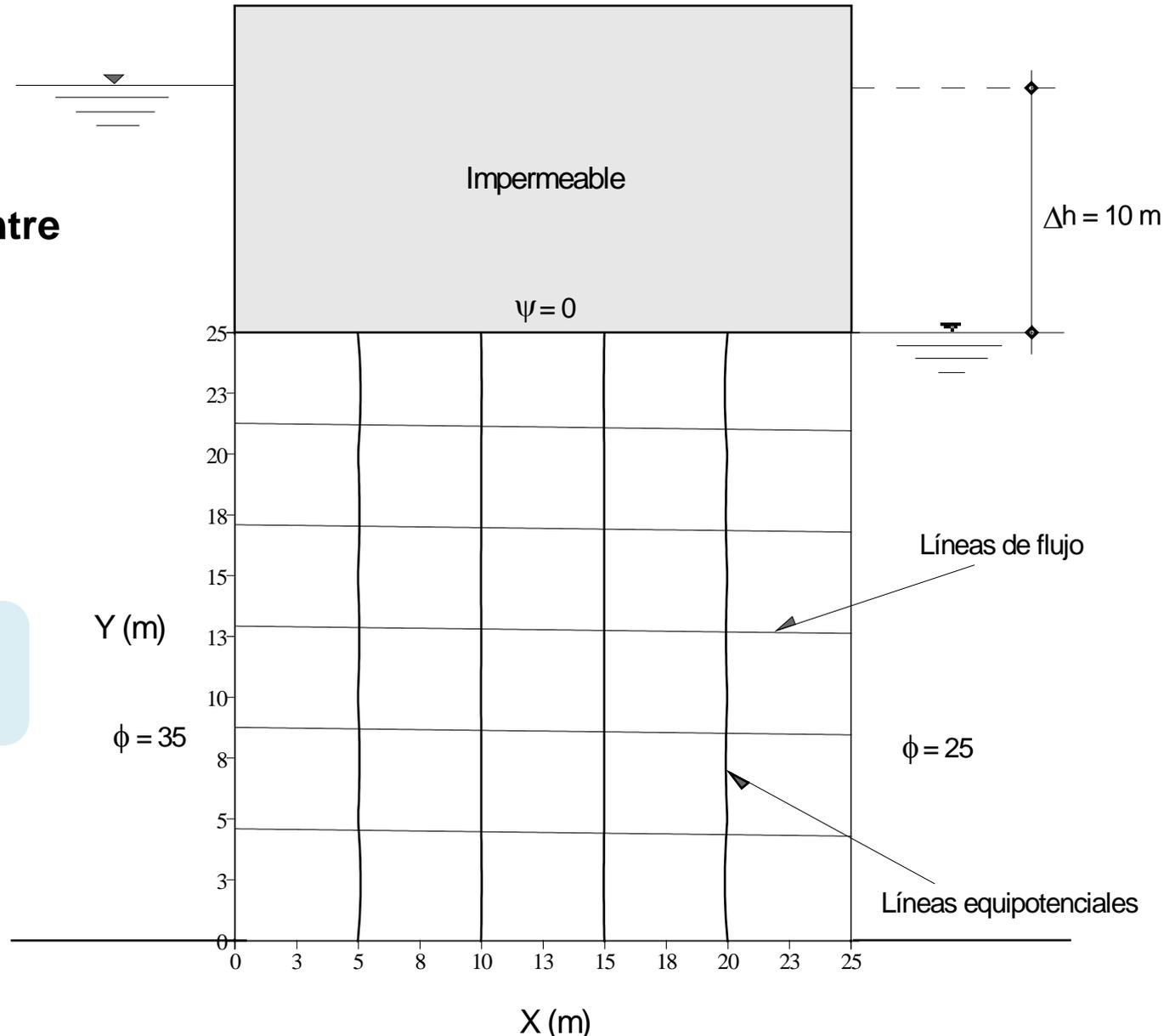
# Red de flujo obtenida con FLOWNETS (López, 2001)



**Verificación de ortogonalidad entre líneas de flujo y equipotenciales**  
(López, 2001)

**Gasto:**

$$q = kh \left( \frac{n_f}{n_e} \right) = khS$$

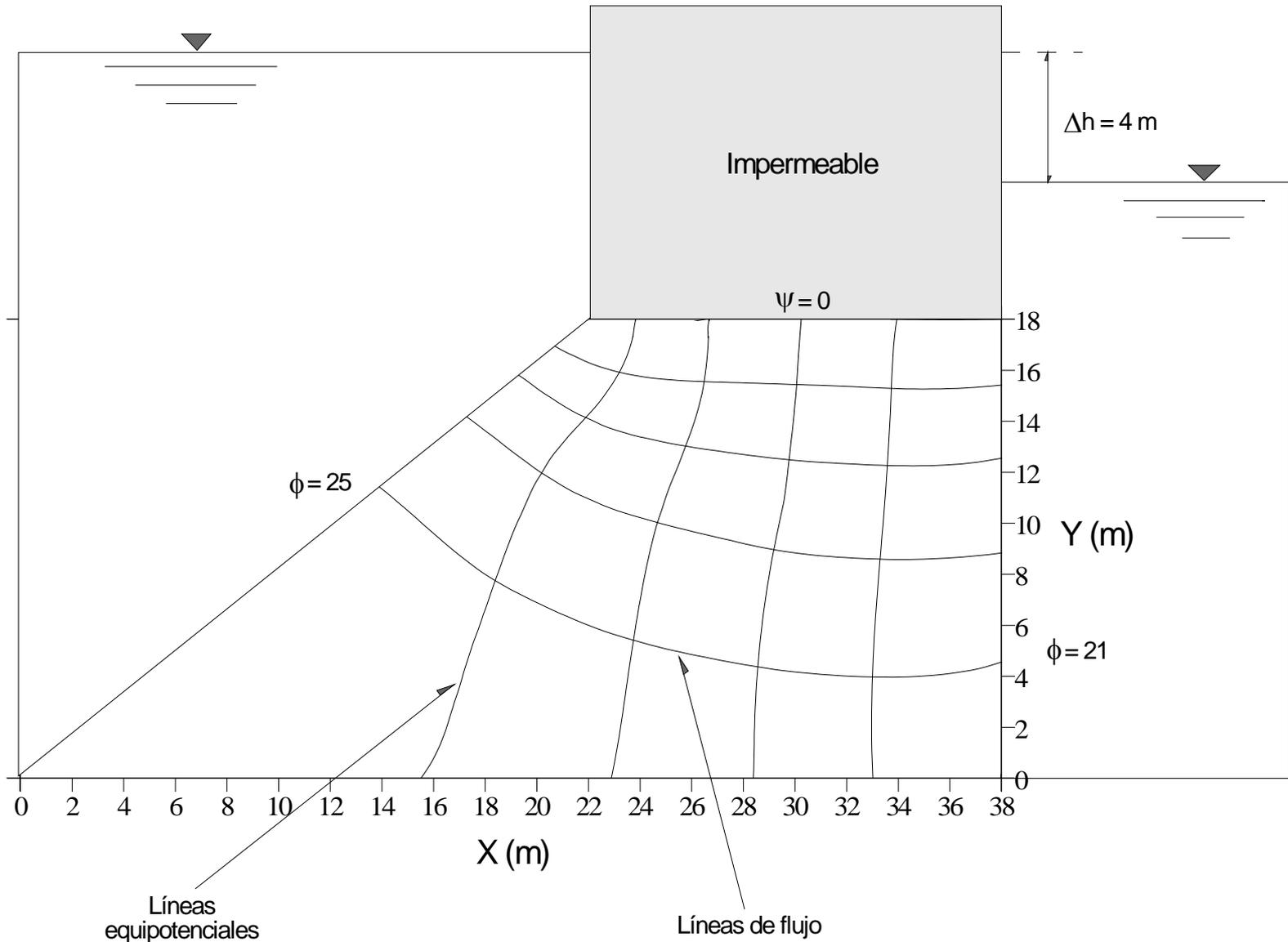




# Red de flujo obtenida con FLOWNETS (López, 2001)



## Red de flujo en un dominio de forma trapezoidal

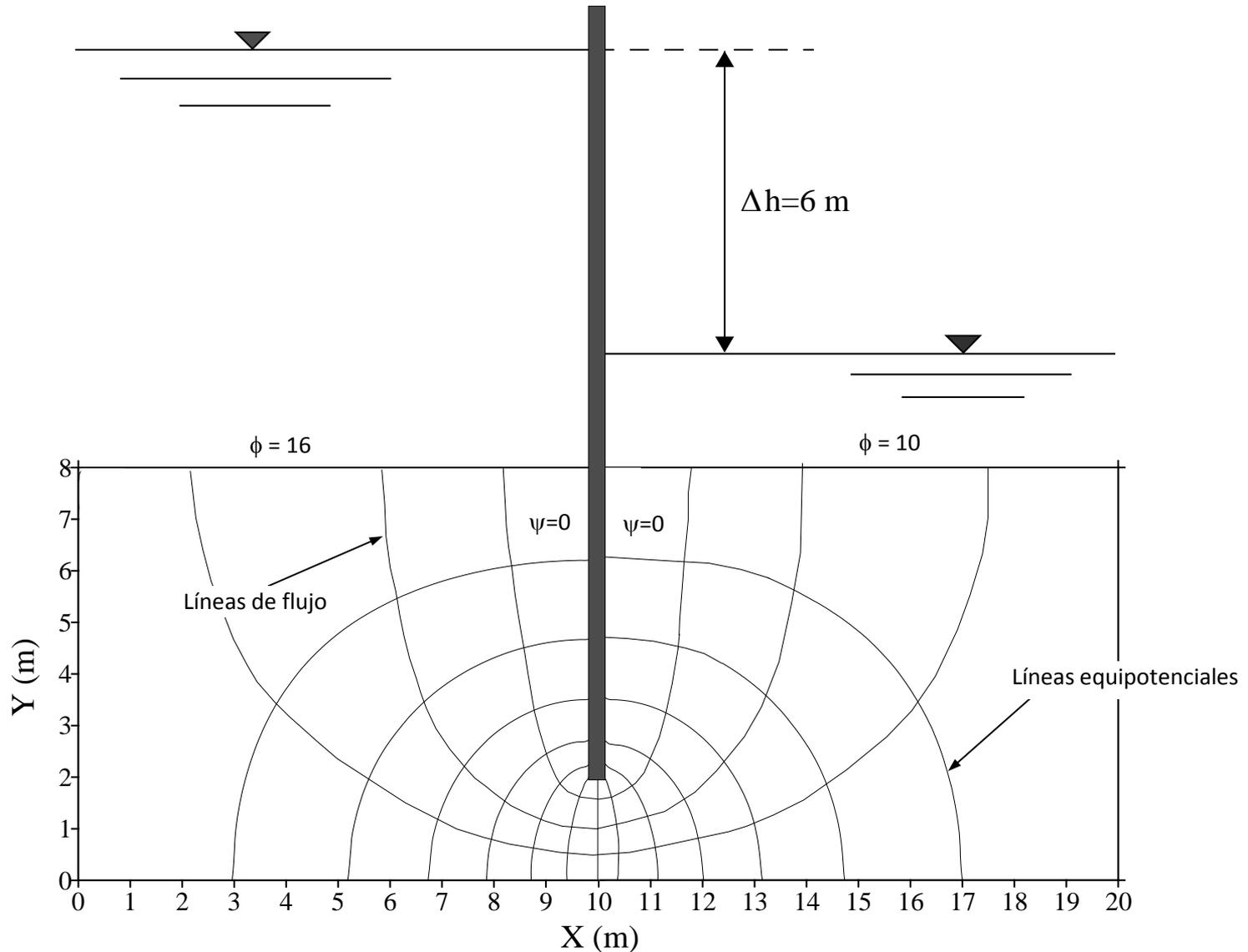




# Red de flujo obtenida con FLOWNETS (López, 2001)

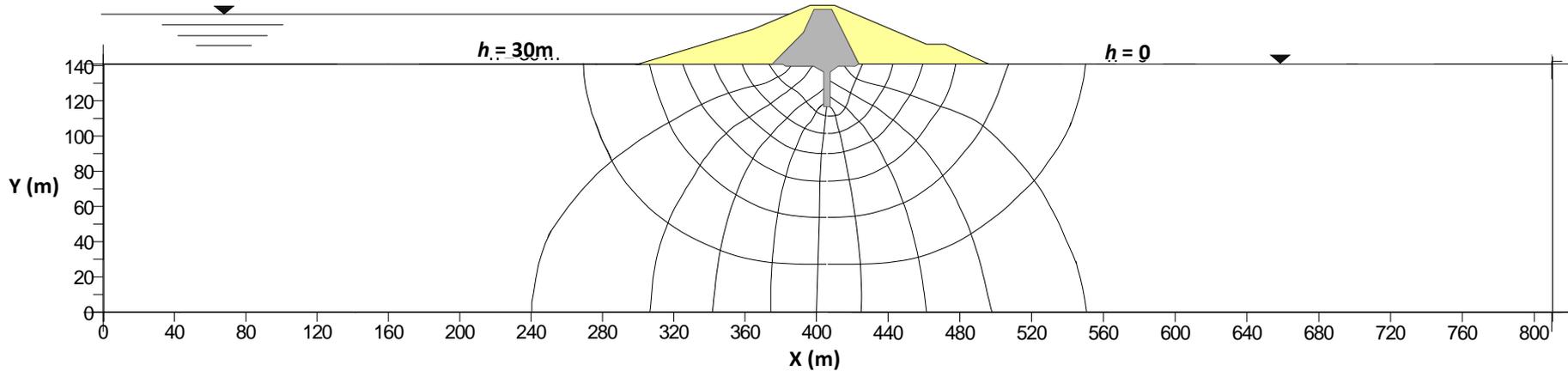


## Red de flujo bajo la cimentación de una tablestaca

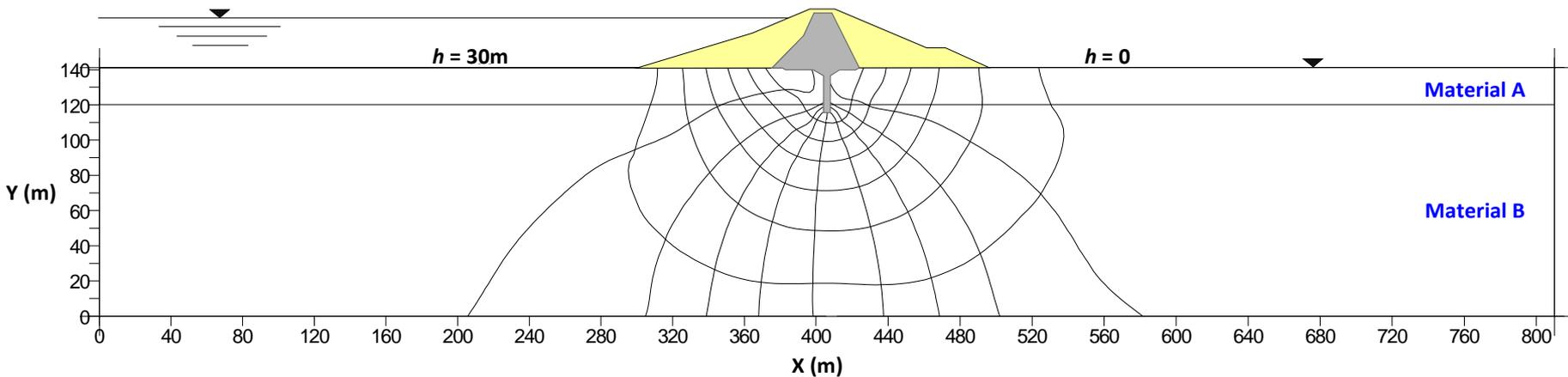




## Red de flujo en un medio homogéneo e isótropo



## Red de flujo en un medio estratificado



## Gradiente hidráulico:

$$\{i\}^e = \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial h / \partial x \\ \partial h / \partial y \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_i \\ h_j \\ h_m \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} [B] \{h\}^e$$

## Velocidad de flujo:

$$\{V\}^e = -[R] \{i\}^e = -\frac{1}{2\Delta} [R][B] \{h\}^e$$

Donde:

$$\begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} = [R]$$

Matriz de permeabilidad

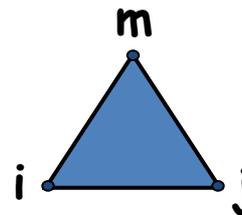
$$[B] = \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_j - y_m & y_m - y_i & y_i - y_j \\ x_m - x_j & x_i - x_m & x_j - x_i \end{bmatrix}$$

Matriz geométrica

## Gasto:

$$q_{rx} = -b_r \{V_x\}^e$$

$$q_{ry} = -c_r \{V_y\}^e$$





# Algoritmo FLOWNETS (López, 2001)



## Pantalla de inicio

**FLOWNETS 2001**

Flujo de agua en suelos

**N. P. López & G. Auvinet**

## Ventana de resultados

Resultados del Análisis Determinista

**ANÁLISIS DETERMINISTA**

Vectores de velocidad  Vectores de gradiente hidráulico

**NODO #** 13

**COORDENADAS**  
X = 4.992 Y = 10.704

**CARGA HIDRÁULICA**  
h = 86.629

**ELEMENTO #** 71

**COORDENADAS**  
X = 67.163 Y = 27.334

**GRADIENTE HIDRÁULICO**  
 $i_x = 0.159$   $i_y = 0.129$   
 $i_R = 0.205$

**VELOCIDAD DE FLUJO**  
 $V_x = 7.27E-7$   $V_y = 5.9E-7$   
 $V_R = 9.37E-7$

**GASTO A TRAVÉS DEL LADO OPUESTO AL NODO**

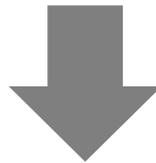
1er NODO = 474	2o NODO = 448	3er NODO = 439	Gasto Total =
$Q_x = -1.93E-6$	$Q_x = 9.3E-7$	$Q_x = 9.98E-7$	$Q_x =$
$Q_y = 4.5E-7$	$Q_y = -2.08E-6$	$Q_y = 1.63E-6$	$Q_y =$

**MAILLA DE ELEMENTOS FINITOS**

**FLOWNETS**

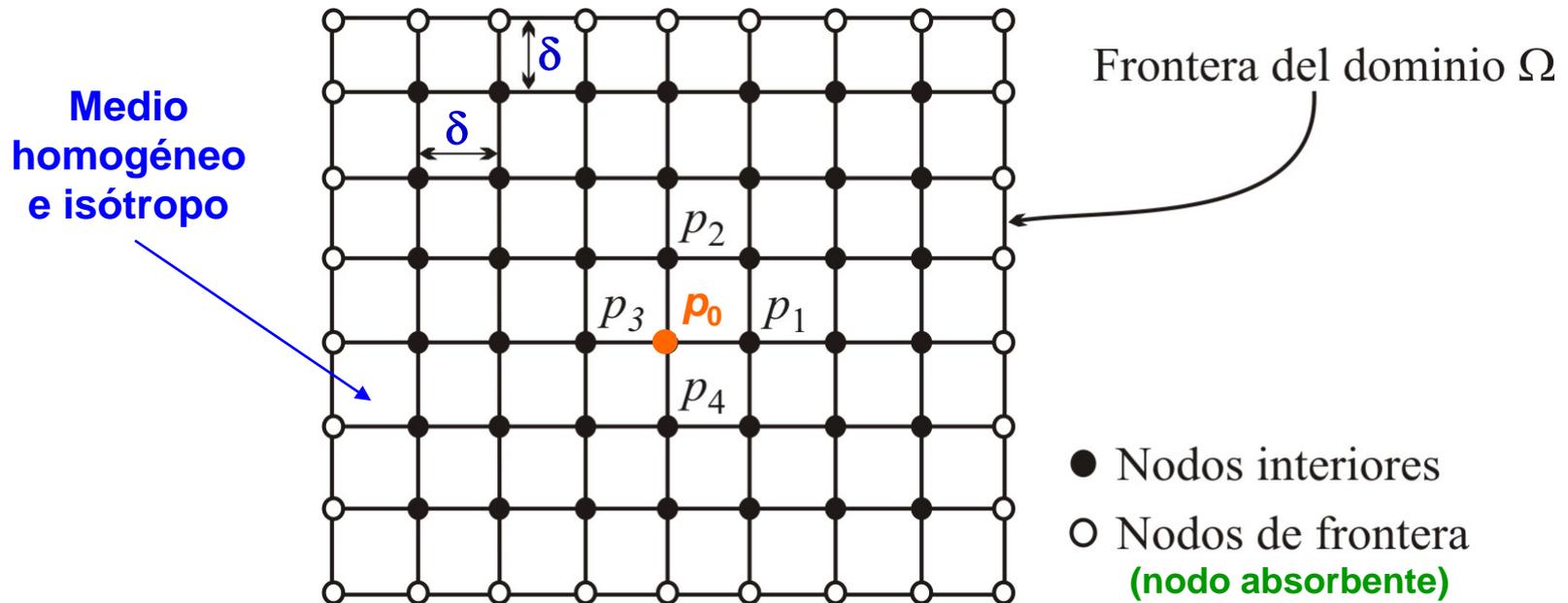


## 2.2 Método de los paseos casuales (caminatas aleatorias)



Representación de caminatas  
aleatorias 3D en un plano 2D

El **método de los paseos casuales** (**RWM –Random Walk Method–**) consiste en estudiar los movimientos de una partícula que se desplaza en forma aleatoria sobre los nodos de una malla (con que se modela el dominio de flujo en estudio), permitiendo determinar la carga hidráulica en los puntos de interés del suelo a partir de **la resolución numérica de la ecuación de Laplace en términos de diferencias finitas**.





# Paseos casuales (caminatas aleatorias)



Generar una **serie de trayectorias aleatorias** (mediante números aleatorios) a partir del **nodo  $p_0$**  de la malla **en el cual se desea estimar la carga hidráulica**.



La **partícula se desplaza de manera aleatoria a través de los nodos interiores** de una malla determinada y **se detiene cuando llega** a alguno de los nodos de la frontera, denominados **absorbentes**, porque en ellos se conoce el valor de la carga hidráulica (condición de frontera impuesta).



Una **trayectoria completa** está constituida por una **secuencia de nodos**, siendo el último un nodo **absorbente**.



La **carga hidráulica se determina entonces, contando los números de trayectorias ( $n_i$ ) que terminan en las distintas fronteras, multiplicándolos por el valor de la carga hidráulica en la frontera respectiva ( $f_i$ ) y dividiendo el resultado entre el número total de trayectorias.**

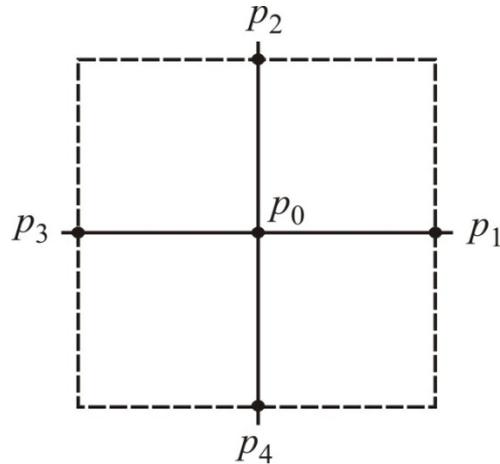


$$h_0 = \frac{n_1 f_1 + n_2 f_2}{n_1 + n_2}$$

Este **procedimiento se repite un número de veces determinado** y el resultado obtenido es una **medida insesgada de la carga hidráulica en el nodo estudiado**.

## Posibilidades de desplazamiento sobre los nodos de una malla

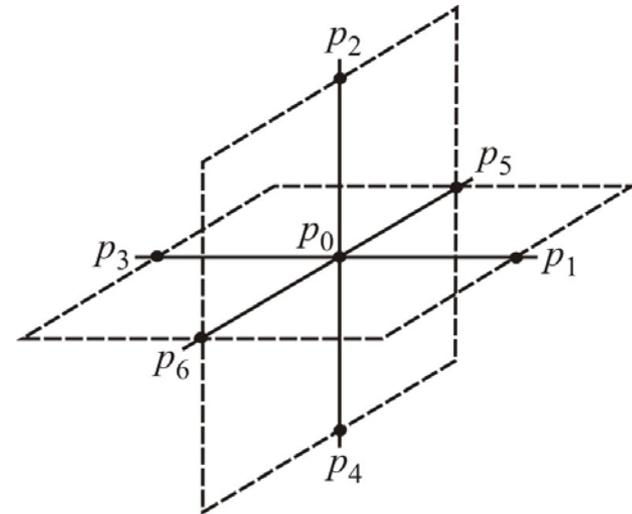
### Dos dimensiones



**Probabilidad de movimiento desde cualquier nodo interior =  $1/4$**

**Cuatro direcciones posibles**

### Tres dimensiones



**Probabilidad de movimiento desde cualquier nodo interior =  $1/6$**

**Seis direcciones posibles**

**Medio homogéneo e isótropo**



# Paseos casuales (caminatas aleatorias)



El **paso** o **módulo** de la malla depende de las permeabilidades

Medio isótropo



La **mall**a es **cuadrada** o es un **cubo** (paso constante en las direcciones espaciales correspondientes)

Medio anisótropo



La **mall**a es **rectangular** o es un **paralelepípedo** (paso distinto en las direcciones espaciales correspondientes).

Condiciones de flujo diferentes al caso de un suelo homogéneo e isótropo



**Generalización**



Método de los paseos casuales se debe adaptar, modificando la resolución de la ecuación de Laplace en los nodos que lo requieran (para diversas condiciones geométricas y de flujo)

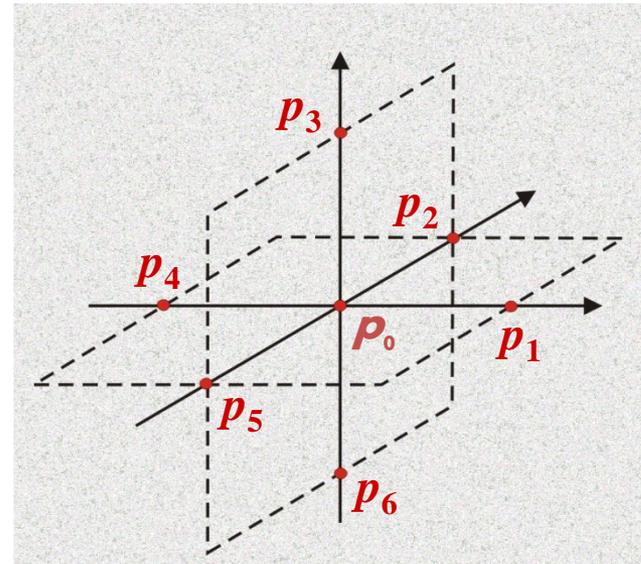
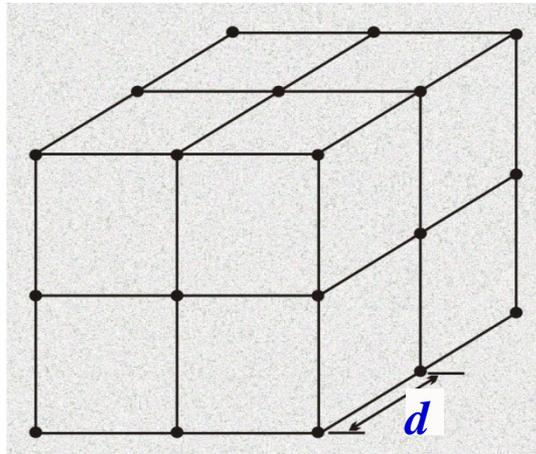
- Anisotropía
- Medios heterogéneos
- Fronteras impermeables, etc.

**Ecuación diferencial parcial 3D:** 
$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

**Diferencias finitas:**

$$k_1 \frac{(h_1 - h_0)}{d} d^2 + k_2 \frac{(h_2 - h_0)}{d} d^2 + k_3 \frac{(h_3 - h_0)}{d} d^2 + k_4 \frac{(h_4 - h_0)}{d} d^2 + k_5 \frac{(h_5 - h_0)}{d} d^2 + k_6 \frac{(h_6 - h_0)}{d} d^2 = 0$$

$$h_0 = \frac{k_1}{\sum_{i=1}^6 k_i} h_1 + \frac{k_2}{\sum_{i=1}^6 k_i} h_2 + \frac{k_3}{\sum_{i=1}^6 k_i} h_3 + \frac{k_4}{\sum_{i=1}^6 k_i} h_4 + \frac{k_5}{\sum_{i=1}^6 k_i} h_5 + \frac{k_6}{\sum_{i=1}^6 k_i} h_6 \longrightarrow \{h\} = \{f\} + [M] \{h\}$$





# Paseos casuales (caminatas aleatorias) en medios heterogéneos simulados 3D



**Sistema de diferencias finitas:**  $\{h\} = \{f\} + [M]\{h\}$

Donde:

$\{h\}$

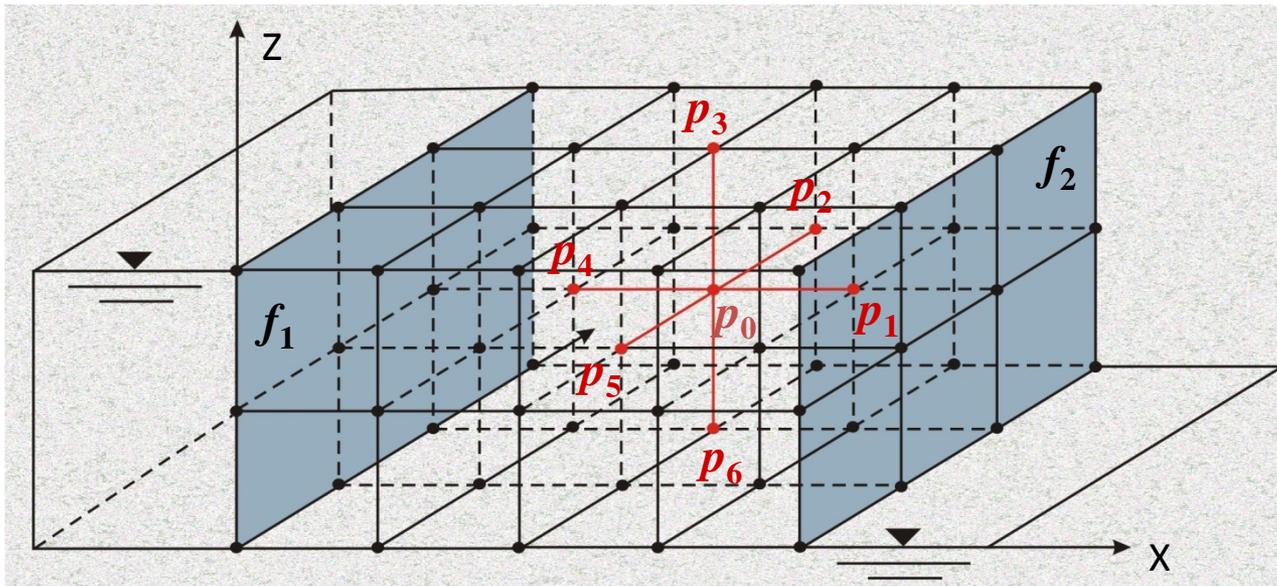
$\{f\}$  Vector columna que define condiciones de los nodos de frontera.

$[M]$  Matriz que define los desplazamientos.

**Probabilidades de desplazamiento:**  $P(j) = \frac{k_j}{k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6}; j = 1, 2, \dots, 6$

**Trayectoria completa:**  $S_T = (p_0, p_1, \dots, p_k)$   
Secuencia de nodos

Nodo absorbente



**Carga hidráulica:**

$$h_0 = \frac{n_1 f_1 + n_2 f_2}{n_1 + n_2}$$



# Representación de caminatas aleatorias 3D en un plano 2D



☞ Desarrollar una técnica donde los objetos tridimensionales se lleven al plano 2D mediante la proyección de puntos y líneas sobre la pantalla gráfica.

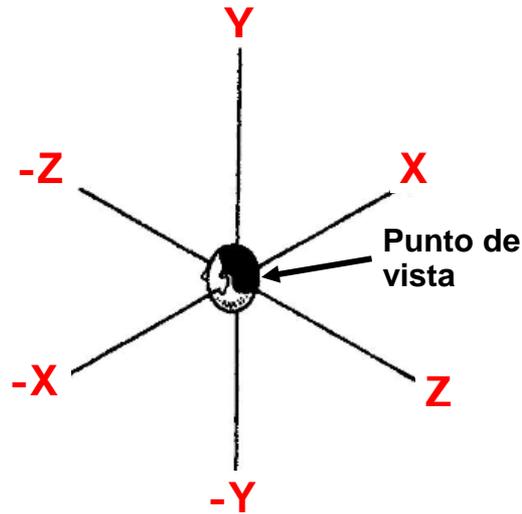
☞ Es posible utilizar fórmulas de **rotación**, **traslación** y **proyección** para transformar las coordenadas del objeto tridimensional en coordenadas de pantalla gráfica.

☞ **Procedimiento:**

- 1) Definir un sistema de coordenadas universales, en donde el punto de vista se localice en el origen del sistema.
- 2) Mediante fórmulas rotación y traslación de ejes, modificar las coordenadas de cada punto del objeto, para tener una perspectiva de la imagen.
- 3) El objeto tridimensional se debe desplazar hacia el fondo, porque el punto de vista se encuentra en el origen.
- 4) Mediante relaciones trigonométricas, proyectar las coordenadas tridimensionales en la pantalla.



# (a) Punto de vista en el origen de coordenadas universales

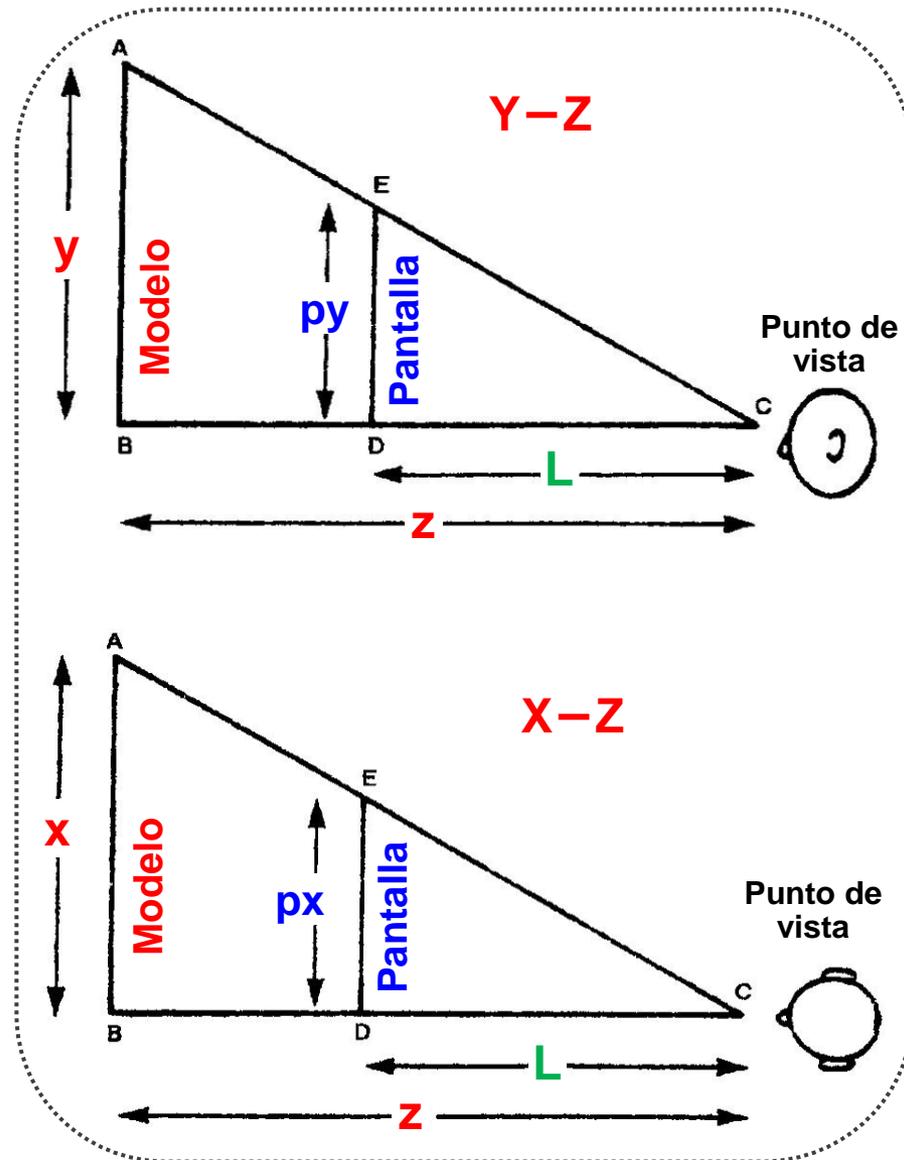


- Las **coordenadas (x, y, z)** de los puntos se transforman en **coordenadas de pantalla (px, py)**.
- La distancia **L** que aparece en la figura es la distancia que hay entre el observador y la pantalla.



Con las transformaciones de coordenadas anteriores, se puede desarrollar un programa que visualice objetos tridimensionales utilizando las opciones de trazado normales para dos dimensiones.

# (b) Proyección de un punto en el plano





# Definición: *Transformación lineal*



Si el dominio de una función  $f$  es  $R^n$  y el codominio es  $R^m$  ( $m$  y  $n$  quizás iguales), entonces  $f$  se denomina **transformación** de  $R^n$  a  $R^m$ , y se dice que  $f$  mapea (aplica o transforma)  $R^n$  en  $R^m$ . Esto se denota escribiendo  $f: R^n \rightarrow R^m$ .

Ilustración:

$$\begin{aligned}w_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\w_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\&\vdots \\w_m &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

Si denotamos:

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = (w_1, w_2, \dots, w_m)$$

Entonces se puede escribir:

$$T : R^n \rightarrow R^m$$



# Representación matricial de una transformación lineal



Entonces, una transformación lineal  $T: R^n \rightarrow R^m$  puede estar definida por ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned}w_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\w_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\&\vdots \\w_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n\end{aligned}$$

En notación matricial:

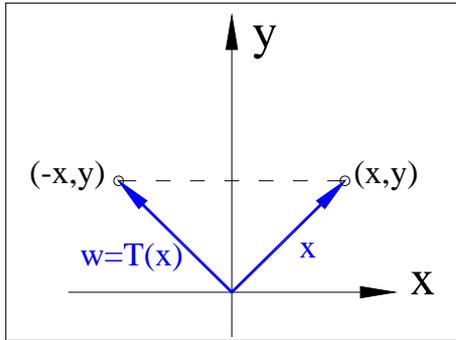
$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

En notación más compacta:

$$\mathbf{W} = \mathbf{A} \mathbf{X}$$

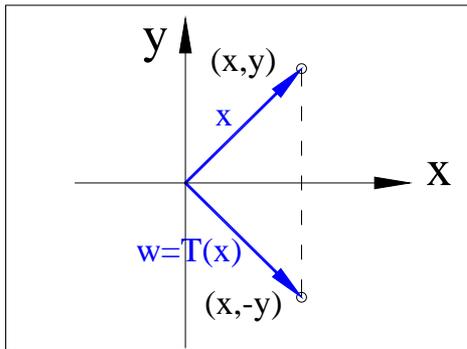
La matriz  $\mathbf{A}$  se conoce como matriz asociada a la transformación (es su *representación matricial*).

## OPERADORES REFLEXIÓN (en el plano)



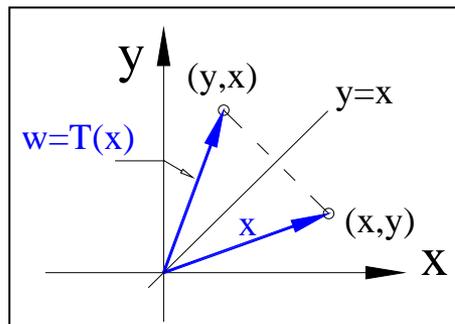
Reflexión respecto al eje “y”

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Reflexión respecto al eje “x”

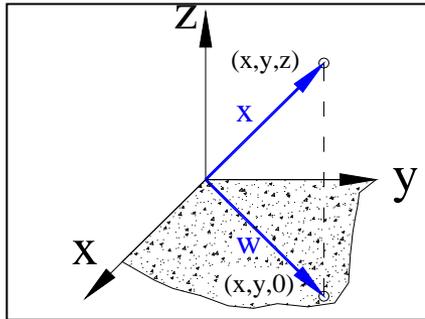
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



Reflexión respecto al eje “y=x”

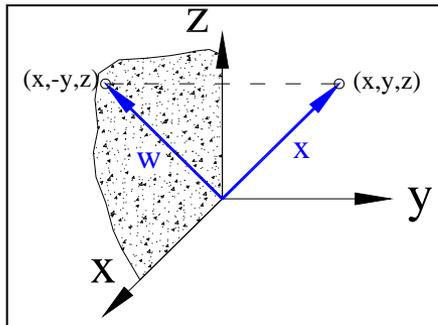
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

## OPERADORES REFLEXIÓN (en el espacio)



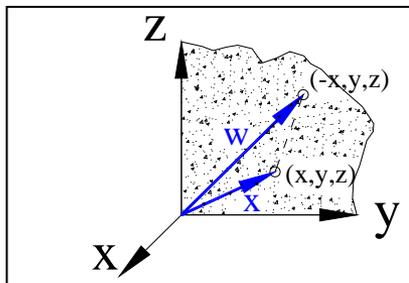
Reflexión respecto al plano “x-y”

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



Reflexión respecto al plano “x-z”

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Reflexión respecto al plano “y-z”

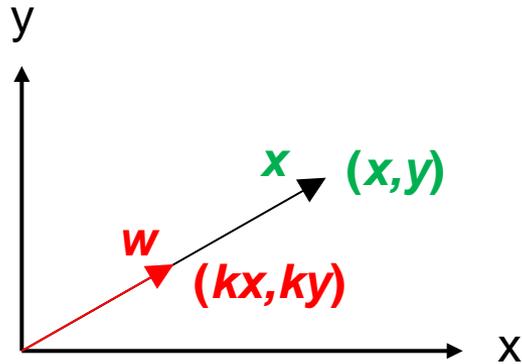
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Efectos geométricos de las transformaciones lineales

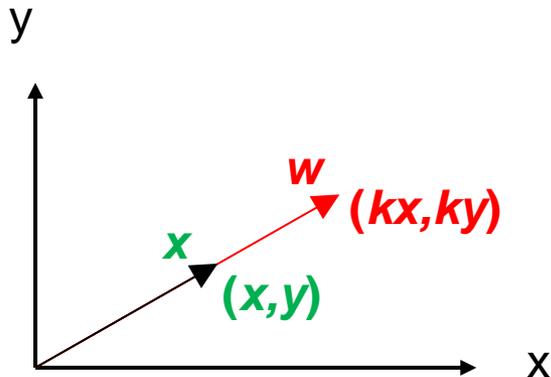


## OPERADORES CONTRACCIÓN Y DILATACIÓN (en el plano)



Contracción con factor  $k$  sobre  $R^2$

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$



Dilatación con factor  $k$  sobre  $R^2$

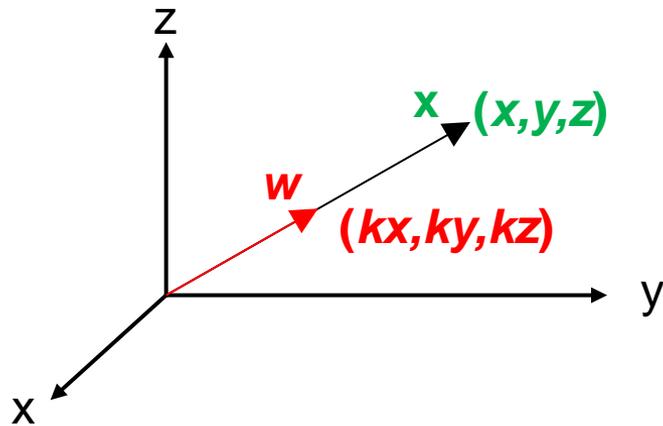
$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$



# Efectos geométricos de las transformaciones lineales



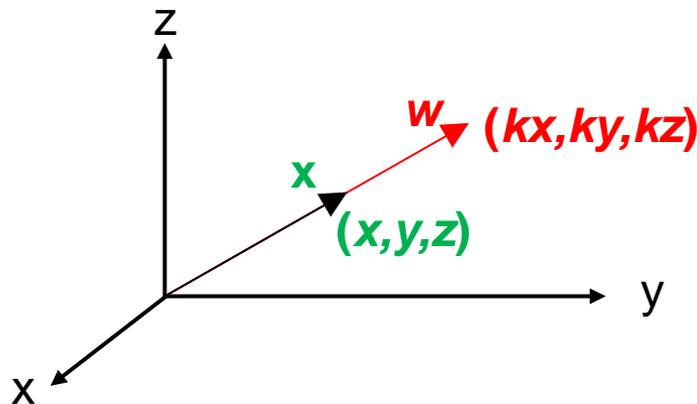
## OPERADORES CONTRACCIÓN Y DILATACIÓN (en el espacio)



Contracción con factor  $k$  sobre  $R^3$

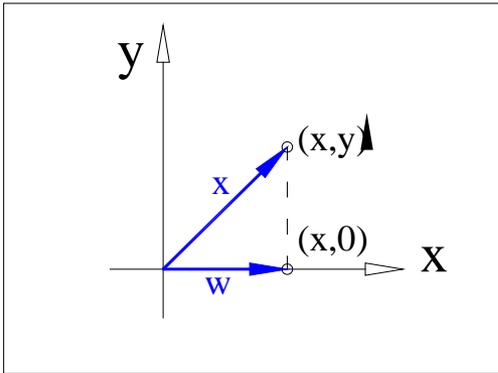
$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

Dilatación con factor  $k$  sobre  $R^3$



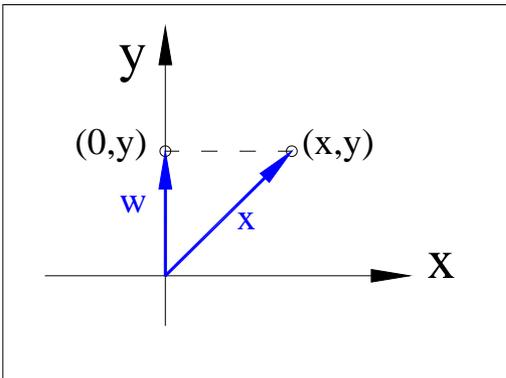
$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

## OPERADORES PROYECCIÓN ORTOGONAL (en el plano)



Proyección ortogonal sobre el eje “x”

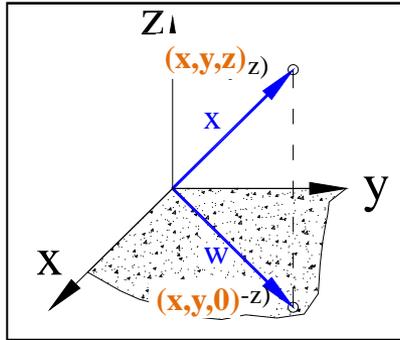
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Proyección ortogonal sobre el eje “y”

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## OPERADORES PROYECCIÓN ORTOGONAL (en el espacio)

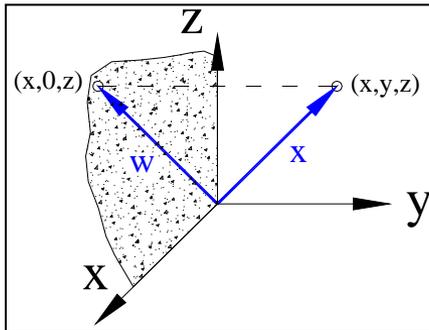


Proyección ortogonal sobre el plano “x-y”

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

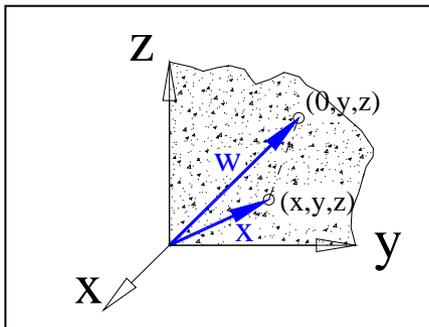


La interpretación geométrica de la transformación  $T(x, y, z) = (x, y)$ , donde  $(x, y, z)$  representa un segmento dirigido cualquiera del espacio cartesiano tridimensional,  $T$  transforma dicho segmento en su **proyección sobre el plano X-Y**.



Proyección ortogonal sobre el plano “x-z”

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Proyección ortogonal sobre el plano “y-z”

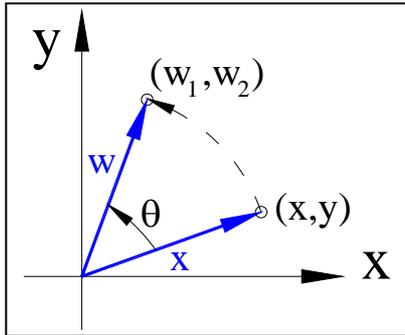
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Efectos geométricos de las transformaciones lineales



## OPERADOR ROTACIÓN (en el plano)



Rotación a través de un ángulo “ $\theta$ ”

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

## OPERADOR TRASLACIÓN

$T(x) = x + b$  si  $b \neq 0$ , esta transformación es no lineal, a esta transformación se le llama **traslación por  $b$** .



Una **traslación por un vector  $b \neq 0$**  **desplaza una figura sumando  $b$  a todos sus puntos.**

Ejemplo:  $T(x) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Rotación de  $45^\circ$  seguida de una traslación por  $(-2,0)$

Transformación afin  $\rightarrow$  Transformación lineal seguida de una traslación.



# RESUMEN: *Efectos geométricos de las transformaciones lineales*



- Reflexiones** { Transforman un vector (o un punto) en su imagen simétrica.
- Proyecciones** { Transforman cada vector en su proyección ortogonal.
- Rotaciones** { Giran un vector hasta describir un ángulo fijo.
- Traslaciones** { Desplazan un vector sumando o restando una cantidad  $b$  a todos sus puntos.
- Contracciones** { Comprimen cada vector por un factor  $k$ .
- Dilataciones** { Estiran cada vector por un factor  $k$ .



# Programa "Conversion3Den2D.vbp" (López-Acosta, abril 2005)



```
Dim NXI, X(), Y(), Z(), PX(), PY(), XN(), YN(), ZN()
```

```
Private Sub Command1_Click()
```

```
    Archivo = InputBox("Nombre del archivo de datos")
```

```
    ROT1 = 5.68319:    Rem 5.68319=326°
```

```
    ROT2 = 6.28319:    Rem 6.28319=360°
```

```
    ROT3 = 5.79778:    Rem 5.79778=332°
```

```
    Open "C:\ARCHI\" + Archivo + ".DAT" For Input As #1
    Input #1, NXI: Rem NUMERO DE PUNTOS A DIBUJAR
```

```
    ReDim X(NXI), Y(NXI), Z(NXI)
```

```
    ReDim XN(NXI), YN(NXI), ZN(NXI)
```

```
    For J = 1 To NXI
```

```
        Input #1, X(J), Y(J), Z(J): Rem COORDENADAS DE CADA PUNTO
```

## Rem ROTACIÓN

```
    XN(J) = -1 * X(J)
```

```
    XA = (Cos(ROT1) * XN(J)) - (Sin(ROT1) * Z(J))
```

```
    ZA = (Sin(ROT1) * XN(J)) + (Cos(ROT1) * Z(J))
```

```
    XN(J) = Cos(ROT2) * XA + Sin(ROT2) * Y(J)
```

```
    YA = Cos(ROT2) * Y(J) - Sin(ROT2) * XA
```

```
    ZN(J) = Cos(ROT3) * ZA - Sin(ROT3) * YA
```

```
    YN(J) = Cos(ROT3) * YA + Sin(ROT3) * ZA
```

## Rem TRASLACIÓN DE "Z" (hacia atrás) y "Y" (hacia abajo)

```
    ZN(J) = ZN(J) - 20
```

```
    YN(J) = YN(J) - 2
```

```
    Next J
```

```
Close #1
```

Continúa →





# Programa "Conversion3Den2D.vbp" (López-Acosta, abril 2005)



Continuación → **A**

```

Rem *****
Rem*  TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS (X,Y,Z) A (X,Y)
Rem *****

```

ReDim PX(NXI), PY(NXI)

For I = 1 To NXI

L = 1200

PX(I) = L \* XN(I) / ZN(I)

PY(I) = L \* YN(I) / ZN(I)

PX(I) = PX(I) + 399

PY(I) = PY(I) + 299

RX = 7200 / 799: Rem 7200=distancia en "X"

RY = 5760 / 599: Rem 5760=distancia en "Y"

PX(I) = (PX(I) \* RX) + 960: Rem 960=Coordenada "X" del punto (0,0)

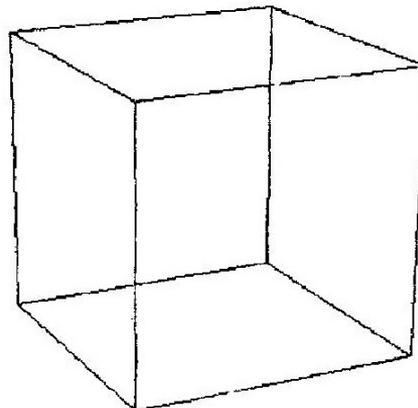
PY(I) = (PY(I) \* RY) + 1080: Rem 1080=Coordenada "Y" del punto (0,0)

'Picture1.Print "PX("; I; ")="; PX(I)

'Picture1.Print "PY("; I; ")="; PY(I)

'MsgBox "CONTINUAR"

Next I



```

Rem *****
Rem*  DIBUJO DE LAS LÍNEAS
Rem *****

```

'Line (960, 1080)-(8160, 6840)

Line (PX(1), PY(1))-(PX(2), PY(2))

Line (PX(2), PY(2))-(PX(3), PY(3))

Line (PX(3), PY(3))-(PX(4), PY(4))

Line (PX(4), PY(4))-(PX(1), PY(1))

Line (PX(5), PY(5))-(PX(6), PY(6))

Line (PX(6), PY(6))-(PX(7), PY(7))

Line (PX(7), PY(7))-(PX(8), PY(8))

Line (PX(8), PY(8))-(PX(5), PY(5))

Line (PX(1), PY(1))-(PX(2), PY(2))

Line (PX(2), PY(2))-(PX(6), PY(6))

Line (PX(6), PY(6))-(PX(5), PY(5))

Line (PX(5), PY(5))-(PX(1), PY(1))

Line (PX(4), PY(4))-(PX(3), PY(3))

Line (PX(3), PY(3))-(PX(7), PY(7))

Line (PX(7), PY(7))-(PX(8), PY(8))

Line (PX(8), PY(8))-(PX(4), PY(4))

Line (PX(4), PY(4))-(PX(1), PY(1))

Line (PX(1), PY(1))-(PX(5), PY(5))

Line (PX(5), PY(5))-(PX(8), PY(8))

Line (PX(8), PY(8))-(PX(4), PY(4))

Line (PX(3), PY(3))-(PX(2), PY(2))

Line (PX(2), PY(2))-(PX(6), PY(6))

Line (PX(6), PY(6))-(PX(7), PY(7))

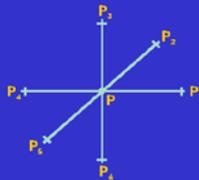
Line (PX(7), PY(7))-(PX(3), PY(3))

End Sub

## Pantalla de inicio

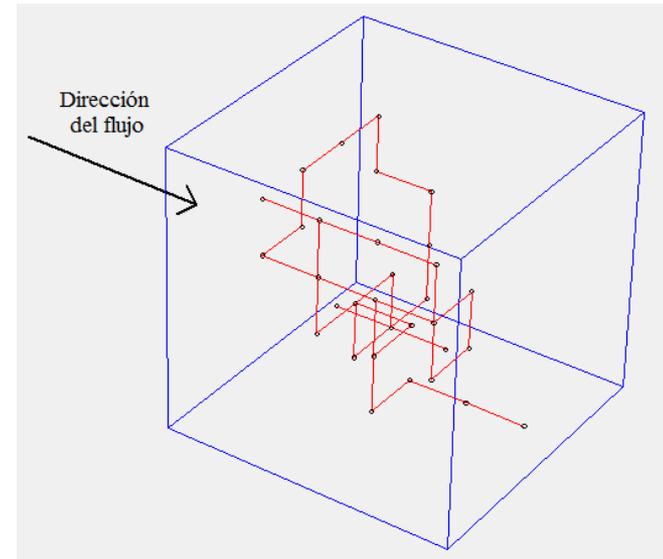
### PASECA 2003

Método de los Paseos Casuales en los Análisis de Flujo de Agua



N. P. López-Acosta & G. Auvinet

## Ejemplo de una caminata aleatoria generada por el programa



## Código y datos solicitados por el programa

```

Form
ACTIVATE
YA2 = (Cos(ROT2) * Y(K, I, J)) - (Sin(ROT2) * XA2)
ZN2(K, I, J) = (Cos(ROT3) * ZA2) - (Sin(ROT3) * YA2)
YN2(K, I, J) = (Cos(ROT3) * YA2) + (Sin(ROT3) * ZA2)
Rem DESPLAZAMIENTOS PARA "Z" y "Y" --Punto final--
ZN2(K, I, J) = ZN2(K, I, J) - 10
YN2(K, I, J) = YN2(K, I, J) - 1
Rem TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS --Pu
EX2 = L * XN2(K, I, J) / ZN2(K, I, J)
FY2 = L * YN2(K, I, J) / ZN2(K, I, J)
EX2 = EX2 + 145
FY2 = FY2 + 140
EX2 = (EX2 * RX) + 3000
FY2 = (FY2 * RY) + 50

Rem SE DIBUJA EL PUNTO DE CÁLCULO:
Rem IA, JA, KA=Punto inicial; I,J,K=Nu
Circle (PX1, PY1), 24, RGB(0, 0, 0)

Rem SE DIBUJAN LOS PASOS:
Line (PX1, PY1)-(EX2, FY2), RGB(255, 0, 0)

If K = 1 Or K = 6 Then GoTo 1000
900 GoTo 310: Rem CONTINÚA LA CAMINATA

Rem -----
Rem SE CALCULA LA CARGA HIDRÁULICA
Rem -----
1000 Circle (EX2, FY2), 24, RGB(0, 0, 0)

SDI = D1 + D4
HCC = ((H4 * D4) + (H1 * D1)) / SDI
StatusBar1.Panels(6) = Format(HCC, "0.00#")

1500 Next JS: Rem TERMINAN LAS SIMULACIONES
2000 Rem METODOPC.Show
        
```

**PASECA 2003**

Información de cálculo requerida:

Punto X:

Punto Y:

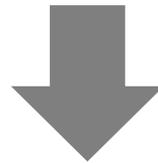
Punto Z:

Nº de Simulaciones:

Nombre del archivo de datos:  
C:\Users\NLopezA\MisPrograma:



## 2.3 Transformación o mapeo conforme



Transformaciones

Solución analítica aproximada

Obtención de una función que permita transformar un problema del dominio geométrico que se busca resolver en un problema cuya solución sea conocida.

Mapeo

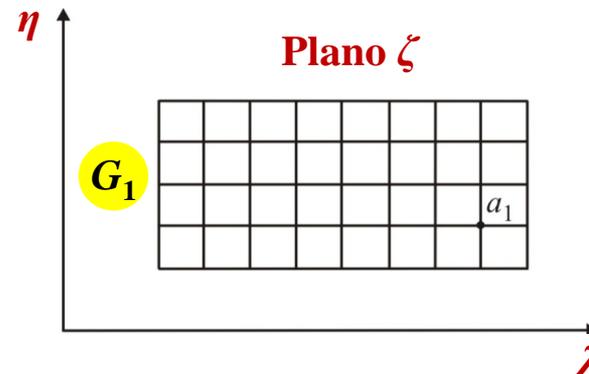
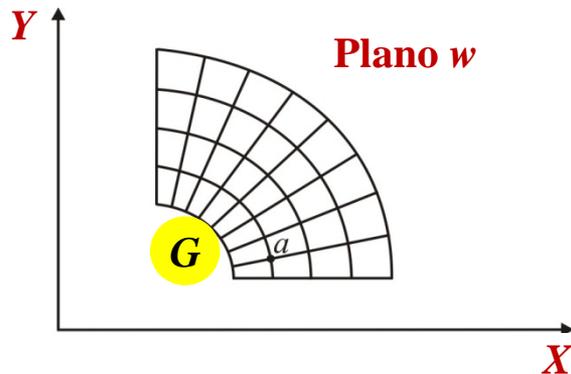


Procedimiento mediante el cual se hacen corresponder los puntos de una figura de un plano  $\zeta$  con los puntos de la figura respectiva en el plano  $w$ .



Se llama **conformal** o **conforme** (“*Conformal mapping*”) cuando no modifica los ángulos de intersección y las formas geométricas aproximadas entre los planos de interés (Harr, 1962).

**Transformación conforme del dominio  $G$  en el dominio  $G_1$**  (Harr, 1962; Panov, 1963; Spiegel, 1964):



La ecuación diferencial de Laplace puede resolverse para un dominio  $G$



si la **transformación o mapeo conforme** de este dominio con algún otro dominio  $G_1$  más simple, es conocida.



# Transformación o mapeo conforme



— La transformación se realiza por medio de la **función analítica de una variable compleja**:

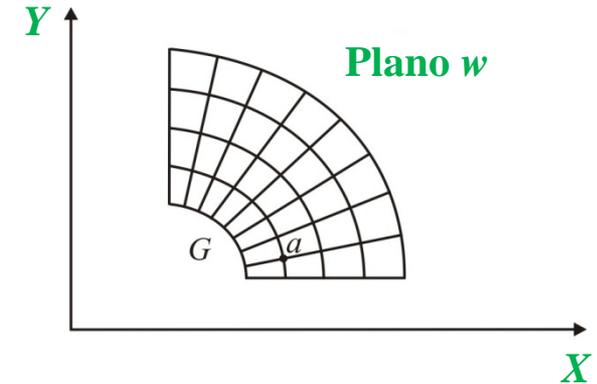
— **Donde:**

$$\zeta = f(w)$$

$$\zeta = \lambda + \eta i \quad ; \quad w = x + yi$$

— **Además:**

$$f(w) = \underbrace{g_1(x, y)}_{\lambda} + \underbrace{g_2(x, y)}_{\eta} i$$



— La **correspondencia o transformación** está dada por las funciones:

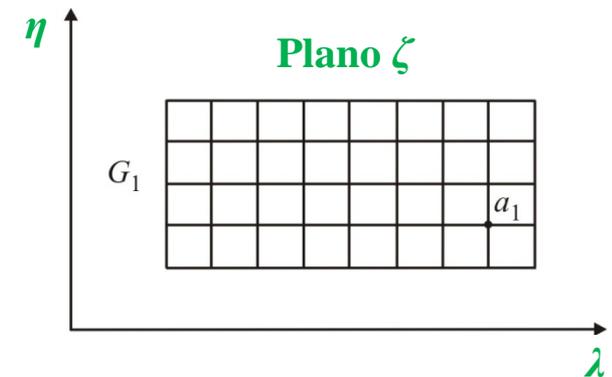
$$\lambda = g_1(x, y) \quad ; \quad \eta = g_2(x, y)$$

— Finalmente, la **ecuación de Laplace** para un flujo establecido bidimensional:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

— **Se transforma en:**

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} = 0$$





# Transformación o mapeo conforme



Ya existen diversas transformaciones generales (funciones)

- Traslación
- Inversión
- Rotación
- Estrechamiento



Permiten trasladar, invertir, etc. el dominio del plano original al plano correspondiente (Harr, 1962).



Algunas de estas transformaciones especiales se indican en la forma de tablas (Spiegel, 1964).

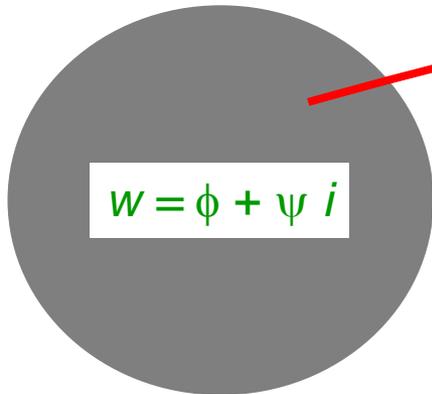


# Transformación o mapeo conforme



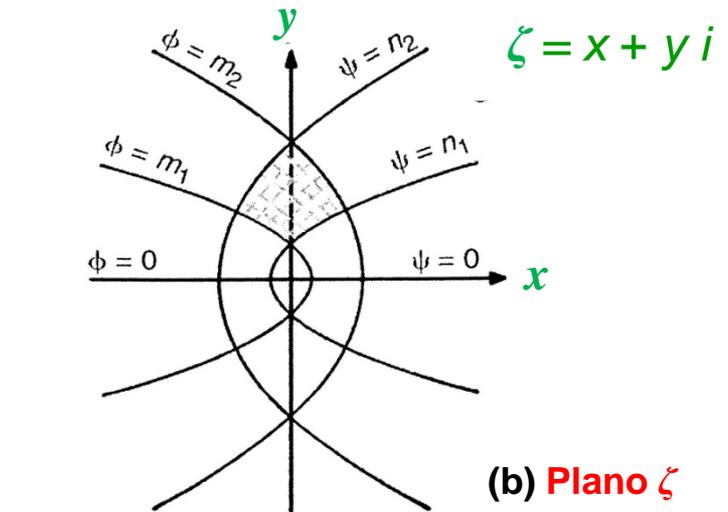
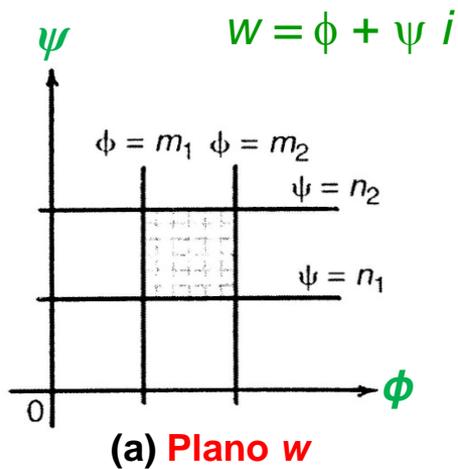
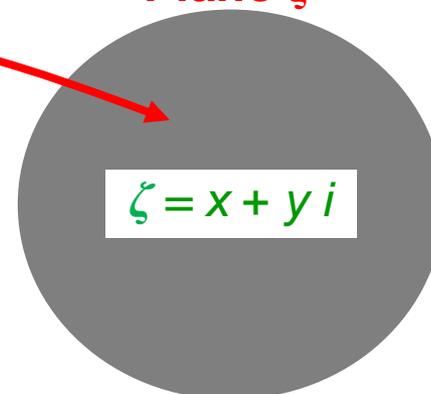
Plano  $w$  ← Dominio

Plano  $\zeta$  ← Codominio



$$\zeta = w^2$$

Transformación



Líneas rectas perpendiculares

Parábolas cofocales



# Transformación o mapeo conforme



➤ Suponer que la función:  $\omega = \phi + \psi i$     ➔    Es función analítica de:  $z = x + yi$

➤ Es decir:  $\omega = f(z)$

➤ Número complejo:  $x_1 + y_1 i$     ➔    Se localiza en el punto  $P_1$  del Plano  $z$

➤ Como:  $\omega = f(z)$



Deberá existir un punto  $Q_1$  en el Plano  $\omega$     ➔    Que corresponde al punto  $P_1$  en el Plano  $z$

➤ Por ejemplo, si la función es:  $\omega = z^2$

➤ ¿Cuál es el punto que en el Plano  $\omega$  corresponde al punto  $z=4+2i$  del Plano  $z$ ?

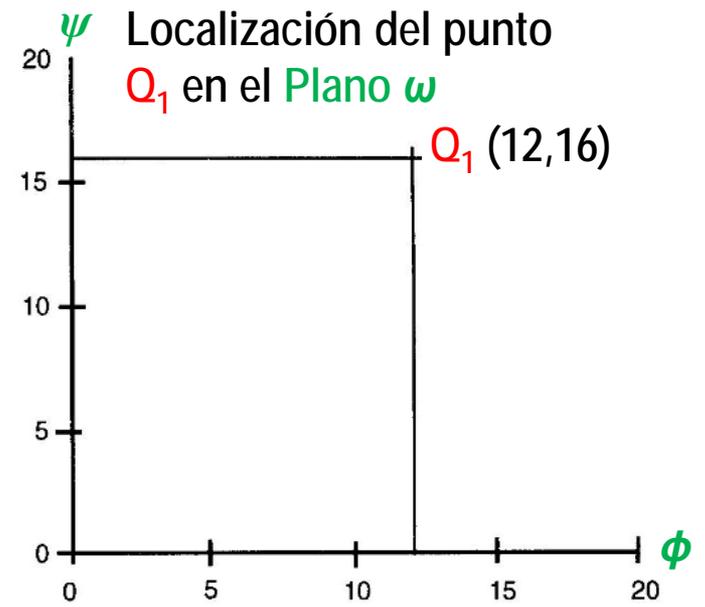
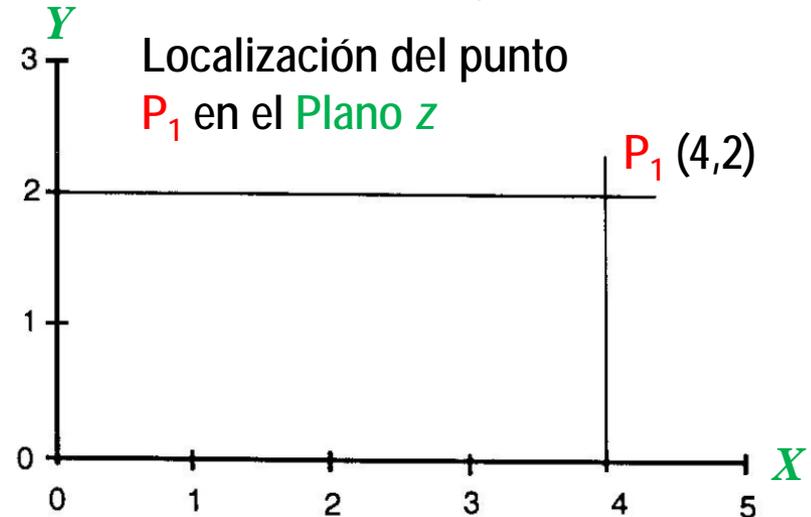
$$\omega = (\phi + \psi i) = (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2$$

➤ Igualando las partes reales y las imaginarias:

$$\phi = x^2 - y^2 \quad ; \quad \psi i = 2xyi \quad \dots \dots \dots (1)$$

➤ Sustituyendo en (1) :  $x_1=4$  y  $y_1=2$ , se obtiene:

$$\omega = 12 + 16i$$





# Transformación o mapeo conforme



➤ Para una secuencia de puntos, se tendrá que para una curva determinada en el Plano  $z$ , se puede obtener la curva correspondiente en el Plano  $\omega$ :

➤ Por ejemplo, si la función es:  $z = \omega^2$

➤ En este caso, se tiene:  $x + yi = (\phi + \psi i)^2 = \phi^2 + 2\phi\psi i - \psi^2$

➤ Consecuentemente:  $x = \phi^2 - \psi^2$  ;  $y = 2\phi\psi$  ... (2) →

Ecuaciones paramétricas que dan la transformación entre los puntos de los dos planos

## Plano $\omega$ :

➤ Si :  $\phi = c_1$  → Líneas paralelas al eje  $\psi$  ; ➤ Si :  $\psi = c_2$  → Líneas paralelas al eje  $\phi$

➤ Consecuentemente, al sustituir  $\phi = c_1$  en las ecuaciones (2), se obtiene:

$$y = 2c_1\psi \quad ; \quad x = c_1^2 - \psi^2 \quad \rightarrow$$

Ecuaciones paramétricas que dan la transformación entre los puntos de los dos planos

➤ Al eliminar  $\psi$  de las ec. anteriores, se tiene:  $x = c_1^2 - \frac{y^2}{4c_1^2}$  ←

Familia de parábolas que se abren hacia la izquierda del eje  $x$ , con foco en el origen.

➤ De forma similar, al sustituir  $\psi = c_2$  en (2):

➤ Se obtiene:  $x = \frac{y^2}{4c_2^2} - c_2^2$  ← Familia de parábolas que se abren hacia la derecha del eje  $x$ , con foco en el origen.

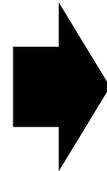
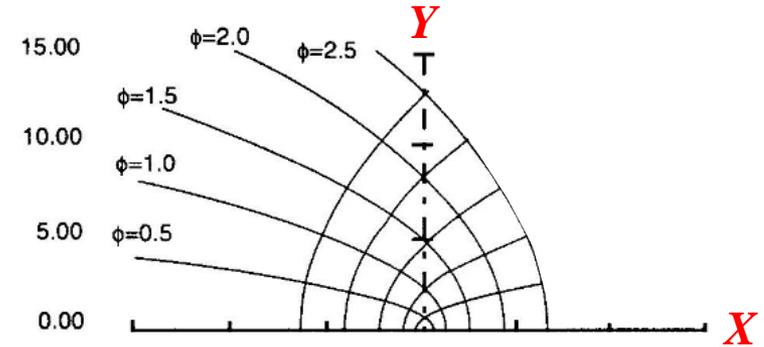
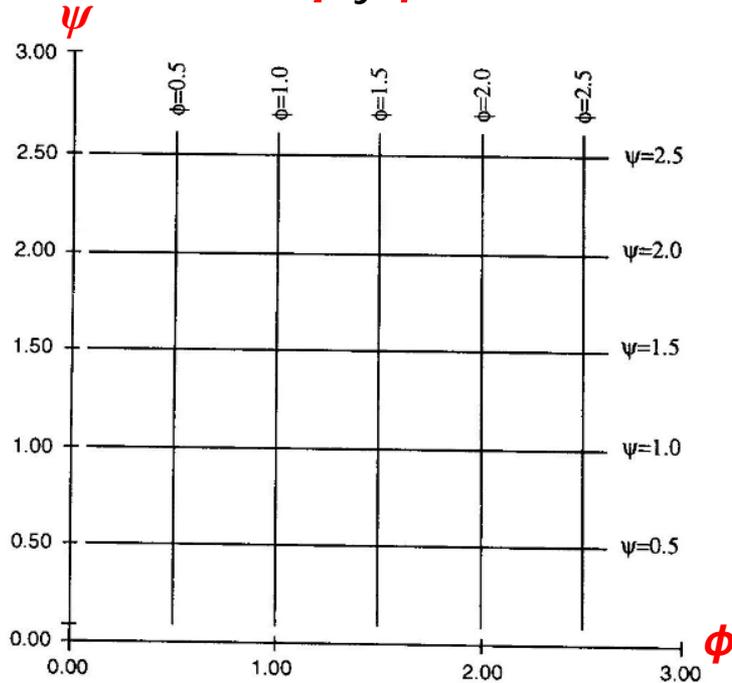


# Transformación o mapeo conforme



Funciones  $\phi$  y  $\psi$  en el Plano  $w$

Funciones  $\phi$  y  $\psi$  en el Plano  $z$



Gasto:  $q = kh \left( \frac{n_f}{n_e} \right) = khS$

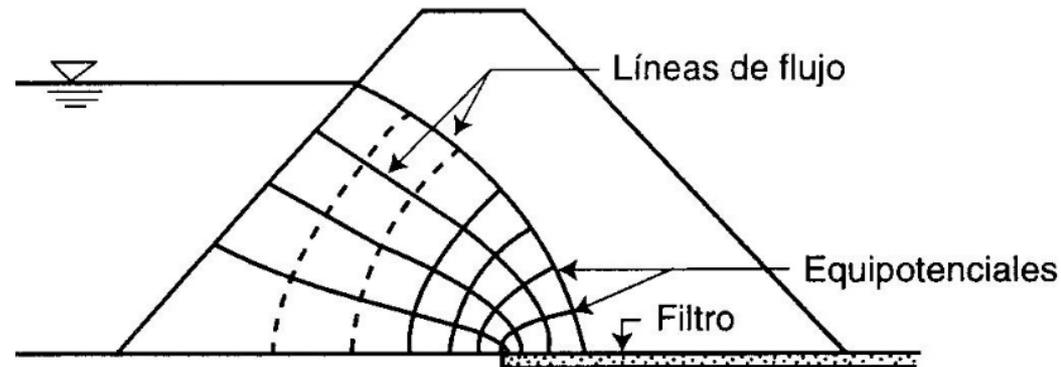
Si  $\psi$  es una función de flujo  
 y  $\phi$  es una función equipotencial,  
 la función:

$$z = w^2$$



Transforma un sistema de flujo uniforme  
 en el Plano  $w$ , en un sistema de flujo con  
 parábolas cofocales en el Plano  $z$ .

Solución de Kozeny para flujo a través de  
 presa de tierra con filtro horizontal:





# Transformación o mapeo conforme

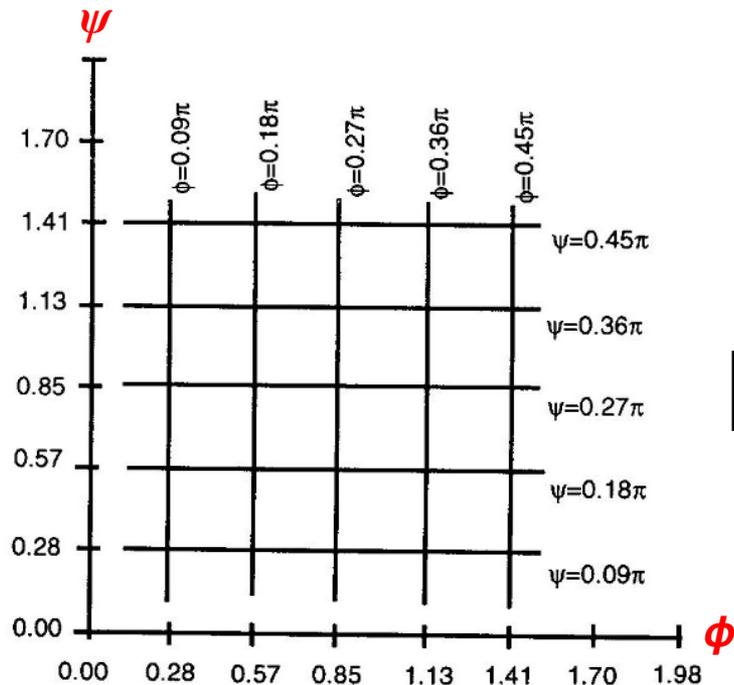


➤ Otro ejemplo, si la función es:  $\omega = \arccos(z/t)$

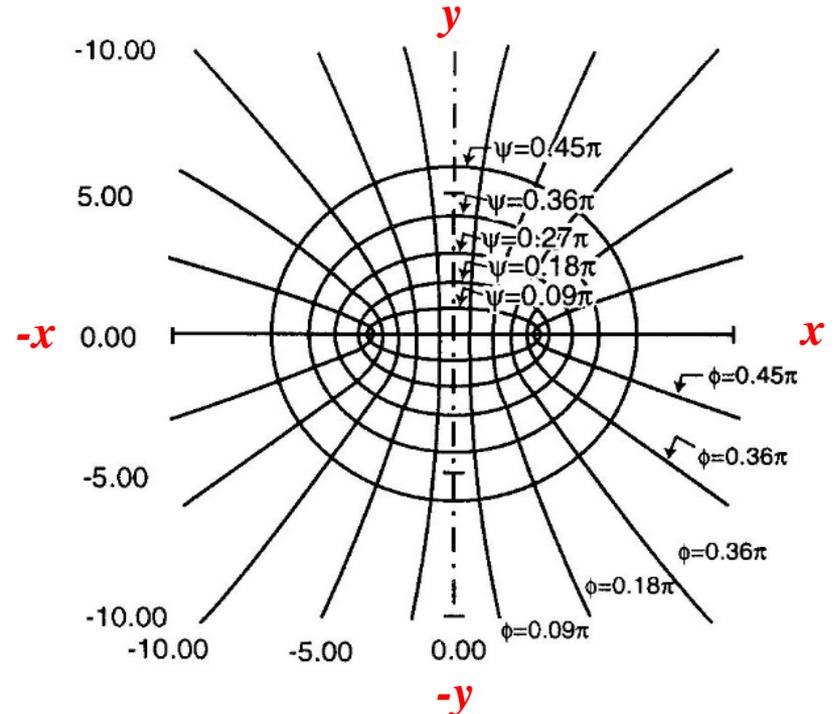
➤ Las familias de curvas que se obtienen:  $\frac{x^2}{t^2 \cosh^2 \psi} + \frac{y^2}{t^2 \operatorname{senh}^2 \psi} = 1$  ← **Elipses cofocales**

$\frac{x^2}{t^2 \cosh^2 \phi} - \frac{y^2}{t^2 \operatorname{senh}^2 \phi} = 1$  ← **Hipérbolas cofocales**

Funciones  $\phi$  y  $\psi$  en el Plano  $\omega$

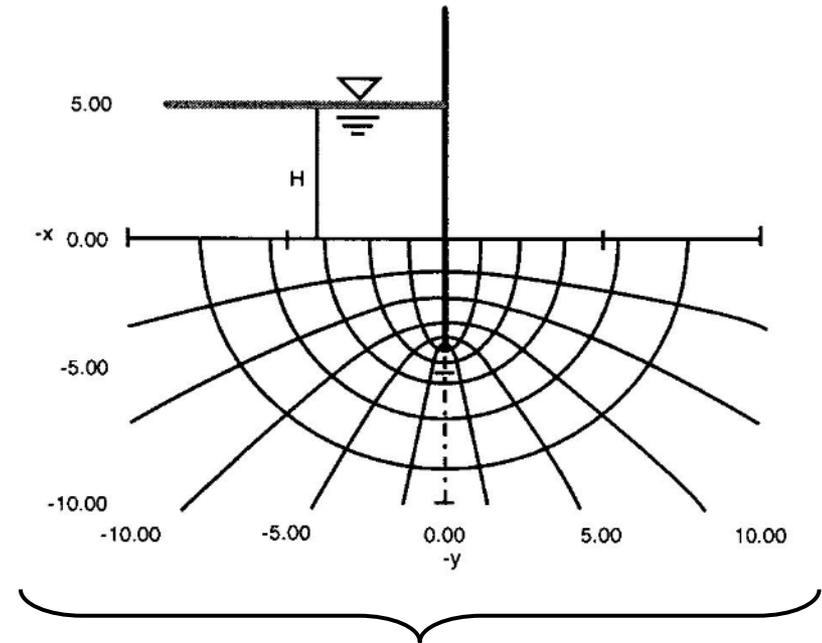
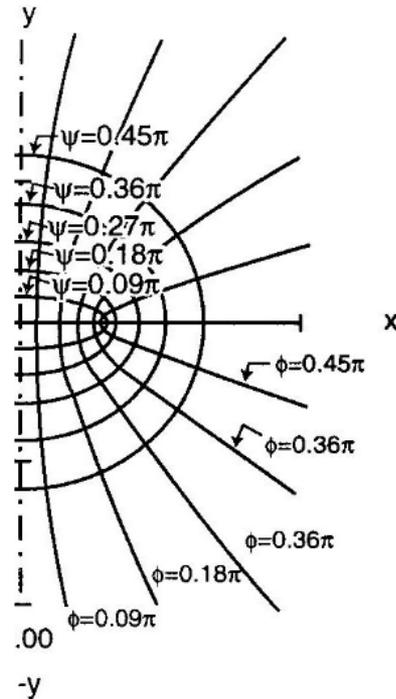


Funciones  $\phi$  y  $\psi$  en el Plano  $z$



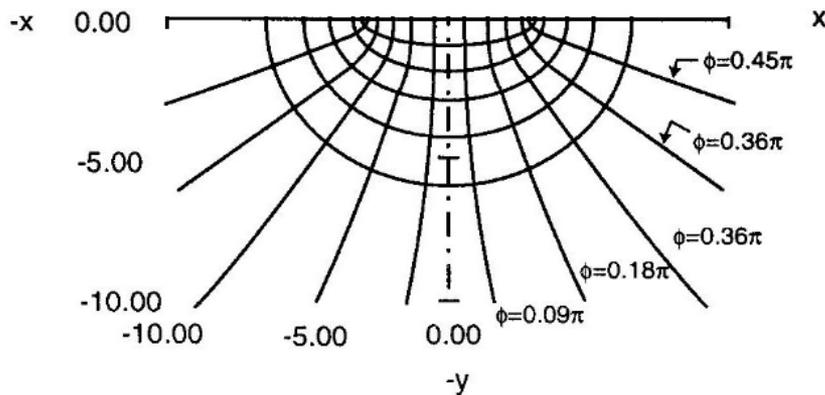
Funciones  $\phi$  y  $\psi$  en el Plano  $z$

Tablestaca

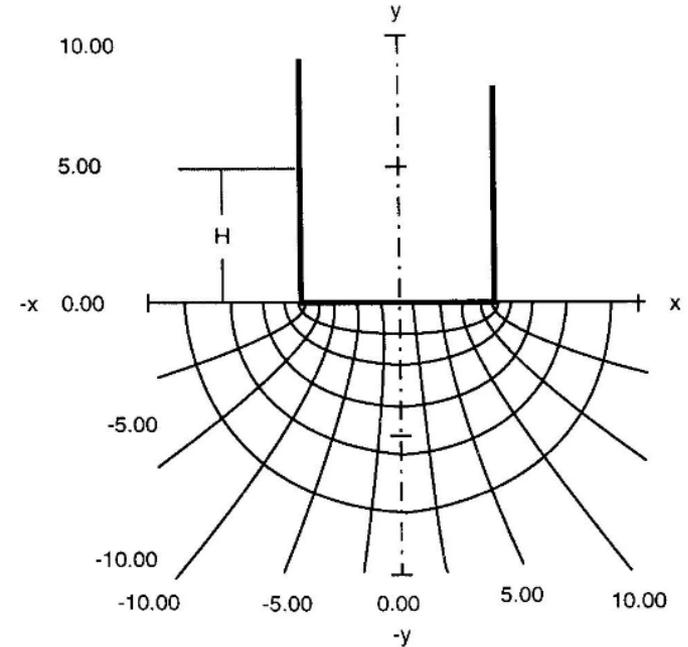


Las familias de **elipses** e **hipérbolas cofocales** representan la **red de flujo** bajo la tablestaca

Funciones  $\phi$  y  $\psi$  en el Plano  $z$



Presa impermeable



Las familias de **elipses** e **hipérbolas cofocales** representan la **red de flujo** bajo la presa impermeable

