



PROBLEMAS RESUELTOS

ÁLGEBRA LINEAL

Tema 2. Espacios Vectoriales



TEMA: MATRIZ DE TRANSICIÓN Y VECTOR DE COORDENADAS

Problema 1: Sean las bases A y B de un espacio vectorial definido sobre los números complejos:

$$A = \{(1, 0, i), (1-i, 1, 1)\}$$

$$B = \{(1, i, 1+i), (1, 1, 0)\}$$

Obtener la matriz de transición de la base A a la base B .

SOLUCIÓN:

- Combinación lineal de $A = \{\overline{a_1}, \overline{a_2}\}$ respecto a $B = \{\overline{b_1}, \overline{b_2}\}$:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{a_1} = \alpha_1 \overline{b_1} + \alpha_2 \overline{b_2} \\ \overline{a_2} = \beta_1 \overline{b_1} + \beta_2 \overline{b_2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\quad} (\overline{a_1})_B = (\alpha_1, \alpha_2)^T \\ \xrightarrow{\quad} (\overline{a_2})_B = (\beta_1, \beta_2)^T \end{array} \quad M_B^A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

- Sustituyendo los valores conocidos:

*Para la 1^{er} combinación lineal:

$$(1, 0, i) = \alpha_1 (1, i, 1+i) + \alpha_2 (1, 1, 0)$$

$$(1, 0, i) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 i + \alpha_2, \alpha_1(1+i))$$

Igualando Términos:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \xrightarrow{\quad} \textcircled{1}$$

$$\alpha_1 i + \alpha_2 = 0 \xrightarrow{\quad} \textcircled{2}$$

$$\alpha_1(1+i) = i \xrightarrow{\quad} \textcircled{3}$$

*de ③:

$$\alpha_1 = \frac{i}{1+i} \cdot \frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{1-i^2}{1+i-i-i^2} = \frac{i+1}{2}$$

$$\boxed{\therefore \alpha_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}$$

*Para la 2^a combinación lineal:

$$(1-i, 1, 1) = \beta_1 (1, i, 1+i) + \beta_2 (1, 1, 0)$$

$$(1-i, 1, 1) = (\beta_1 + \beta_2, \beta_1 i + \beta_2, \beta_1(1+i))$$

Igualando Términos:

$$\beta_1 + \beta_2 = 1-i \xrightarrow{\quad} \textcircled{1}$$

$$\beta_1 i + \beta_2 = 1 \xrightarrow{\quad} \textcircled{2}$$

$$\beta_1(1+i) = 1 \xrightarrow{\quad} \textcircled{3}$$

*de ③:

$$\beta_1 = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{1-i}{1+i-i-i^2} = \frac{1-i}{2}$$

$$\boxed{\therefore \beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}$$



PROBLEMAS RESUELTOS

ÁLGEBRA LINEAL

Tema 2. Espacios Vectoriales



*de ②:

$$\alpha_2 = -\alpha_1 i = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)i$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}i^2 = -\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}$$

$$\therefore \alpha_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

*de ②:

$$\beta_2 = 1 - \beta_1 i = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)i = 1 - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}i^2$$

$$\beta_2 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\therefore \beta_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

- NOTA: Los escalares obtenidos arriba deben satisfacer las ecuaciones ① correspondientes.

- Finalmente:

$$M_B^A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$$

Matriz de transición de “A” a “B”

Problema 2: Sea V un espacio vectorial sobre el campo de los reales, y sean $A = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ y $B = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3\}$ dos bases de V donde:

$$\bar{w}_1 = \bar{v}_1 - 2\bar{v}_2 + \bar{v}_3$$

$$\bar{w}_2 = 2\bar{v}_1 + \bar{v}_2 - \bar{v}_3$$

$$\bar{w}_3 = \bar{v}_1 - \bar{v}_2$$

(a) Determinar la matriz de transición de la base A a la base B .

(b) Expresar al vector $\bar{x} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3$ como combinación lineal de los vectores de la base B .

SOLUCIÓN:

(a) • De acuerdo con los datos del problema se conoce la matriz M_A^B .

- Para obtener entonces M_B^A , sólo se calcula la inversa de $[M_A^B]^{-1} = M_B^A$:



PROBLEMAS RESUELTOS

ÁLGEBRA LINEAL

Tema 2. Espacios Vectoriales



$$[M_A^B]^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3/5 & 1/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1/5 & 1/5 & 3/5 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3/5 & 1/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -3/2 & -5/2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -3/2 & -5/2 \end{array} \right)$$

$$\therefore M_B^A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -3/2 & -5/2 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{Matriz de transición de "A" a "B"}$$

(b) • Se busca ahora escribir al vector " $\bar{x} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3$ " como *combinación lineal* de "B".

• Para ello, se puede hacer $\bar{x} = \underbrace{\alpha \bar{v}_1 + \beta \bar{v}_2 + \gamma \bar{v}_3}_A \rightarrow \underbrace{(\bar{x})_A}_{\text{Vector de coordenadas de } \bar{x} \text{ en la base A}} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$

• Es decir, del vector $\bar{x} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3$ dado, se sabe que $(\bar{x})_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

• Por tanto, realizando la multiplicación $(\bar{x})_B = M_B^A \cdot (\bar{x})_A$ con los datos ya conocidos, se obtiene:

$$(\bar{x})_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (\bar{x})_B = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3/2 \\ -9/2 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{Vector de coordenadas de } \bar{x} \text{ en la base B}$$

• Finalmente, la combinación lineal pedida se escribe como:



PROBLEMAS RESUELTOS

ÁLGEBRA LINEAL

Tema 2. Espacios Vectoriales



$$\bar{x} = \frac{5}{2}w_1 + \frac{3}{2}w_2 - \frac{9}{2}w_3 \quad \leftarrow \bar{x} \text{ como combinación lineal de la base } B$$

Problema 3: Sean $P_{\leq 3}$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a tres con coeficientes reales y $B = \{t^3 + 2t^2, 2t^2 + t, t + 1, 1\}$ una base de $P_{\leq 3}$. Determinar el vector de coordenadas del vector $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$ en la base B .

SOLUCIÓN:

- “ $p(t)$ ” como combinación lineal de la base “ B ”:

$$p(t) = \alpha \bar{b}_1 + \beta \bar{b}_2 + \gamma \bar{b}_3 + \delta \bar{b}_4$$

- Sustituyendo valores:

$$a + bt + ct^2 + dt^3 = \alpha(t^3 + 2t^2) + \beta(2t^2 + t) + \gamma(t + 1) + \delta$$

$$a + bt + ct^2 + dt^3 = \alpha t^3 + 2\alpha t^2 + 2\beta t^2 + \beta t + \gamma t + \gamma + \delta$$

$$a + bt + ct^2 + dt^3 = \alpha t^3 + (2\alpha + 2\beta)t^2 + (\beta + \gamma)t + (\gamma + \delta)$$

- Igualando los términos correspondientes, se tiene:

$$\begin{array}{llll} \alpha t^3 = dt^3 & (2\alpha + 2\beta)t^2 = ct^2 & (\beta + \gamma)t = bt & \gamma + \delta = a \\ \underbrace{\alpha = d} & 2\alpha + 2\beta = c & \beta + \gamma = b & \delta = a - \gamma = a - b + \frac{c}{2} - d \\ & 2\beta = c - 2\alpha & \gamma = b - \beta & \underbrace{\delta = a - b + \frac{c}{2} - d} \\ \boxed{\alpha = d} & \boxed{\beta = \frac{c - 2d}{2}} & \boxed{\gamma = b - \frac{c}{2} + d} & \boxed{\delta = a - b + \frac{c}{2} - d} \end{array}$$

- Finalmente:

$$[p(t)]_B = \begin{bmatrix} d \\ \frac{c - 2d}{2} \\ b - \frac{c}{2} \\ a - b + \frac{c}{2} - d \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{Vector de coordenadas de } p(t) \text{ en la base “} B \text{”}$$



PROBLEMAS RESUELTOS

ÁLGEBRA LINEAL

Tema 2. Espacios Vectoriales



Problema 4: Sean $A = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}\}$ y $B = \{\overline{w_1}, \overline{w_2}, \overline{w_3}\}$ dos bases de un espacio vectorial “V”.

Si la matriz de transición de la base “B” a la base “A” es $M_A^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y

$A = \{x^2, x^2 + 1, x^2 - x\}$, obtener la base “B”.

SOLUCIÓN:

- De “B” como combinación lineal de “A” se sabe:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{w_1} = \alpha_1 \overline{v_1} + \alpha_2 \overline{v_2} + \alpha_3 \overline{v_3} \\ \overline{w_2} = \beta_1 \overline{v_1} + \beta_2 \overline{v_2} + \beta_3 \overline{v_3} \\ \overline{w_3} = \gamma_1 \overline{v_1} + \gamma_2 \overline{v_2} + \gamma_3 \overline{v_3} \end{array} \right\} M_A^B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B \qquad \qquad A$

- Sustituyendo valores en las combinaciones lineales correspondientes:

$$\begin{aligned} \overline{w_1} &= (1)(x^2) + (0)(\cancel{x^2+1}) + (2)(x^2 - x) \rightarrow \boxed{\overline{w_1} = 3x^2 - 2x} \\ &= x^2 + 2x^2 - 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{w_2} &= (2)(x^2) + (1)(x^2 + 1) + 0 \rightarrow \boxed{\overline{w_2} = 3x^2 + 1} \\ &= 2x^2 + x^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{w_3} &= 0 + (2)(x^2 + 1) + (1)(x^2 - x) \rightarrow \boxed{\overline{w_3} = 3x^2 - x + 2} \\ &= 2x^2 + 2 + x^2 - x \end{aligned}$$

- Finalmente:

$$\boxed{B = \{3x^2 - 2x, 3x^2 + 1, 3x^2 - x + 2\}}$$
 ← es la base “B” pedida



PROBLEMAS RESUELTOS

ÁLGEBRA LINEAL

Tema 2. Espacios Vectoriales



Problema 5: En el espacio vectorial de las matrices diagonales de orden dos con elementos reales sobre el campo de los reales, se tienen las bases $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$ y $B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right\}$. Si la matriz de transición de la base B a la base A es $M_A^B = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ 0 & m \end{bmatrix}$, determinar los valores de m y α .

SOLUCIÓN:

- Escribiendo a “ B ” como combinación lineal de “ A ” se sabe:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{b_1} = \alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} \\ \overline{b_2} = \beta_1 \overline{a_1} + \beta_2 \overline{a_2} \end{array} \right\} M_A^B = \begin{bmatrix} \alpha_1 = 2 & \beta_1 = -1/2 \\ \alpha_2 = 0 & \beta_2 = m \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_B \quad \underbrace{\quad}_A$

- Sustituyendo valores (con isomorfismo) en las combinaciones lineales anteriores, se tiene:

$$\boxed{(2, 0, 0, \alpha)} = (2)(1, 0, 0, 1) + (0)(1, 0, 0, -1) = \boxed{(2, 0, 0, 2)} \quad \leftarrow \text{E.c. ①}$$

$$\boxed{(1, 0, 0, -2)} = (-1/2)(1, 0, 0, 1) + (m)(1, 0, 0, -1) = (-1/2, 0, 0, -1/2) + (m, 0, 0, -m) = \boxed{(-1/2 + m, 0, 0, -1/2 - m)} \quad \leftarrow \text{E.c. ②}$$

- Por igualación de vectores en cada expresión anterior, se obtienen los valores de m y α pedidos:

*De la ec. ①: $\boxed{\alpha = 2}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{*De la ec. ②:} \\ 1 = -\frac{1}{2} + m \Rightarrow m = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ \text{o bien: } -2 = -\frac{1}{2} - m \Rightarrow m = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{array} \right\} \boxed{m = 3/2}$$



PROBLEMAS RESUELTOS

ÁLGEBRA LINEAL

Tema 2. Espacios Vectoriales



Problema 6: Sea F el espacio vectorial de las funciones reales variable real sobre el campo de los reales y W el subespacio generado por la funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \sin^2 x$ y $g(x) = \cos^2 x$. Para las bases $A = \{\sin^2 x, \cos^2 x\}$ y $B = \{1, \cos 2x\}$ de W determinar:

(a) La matriz de transición de la base A a la base B .

(b) El vector de coordenadas respecto a la base B del vector cuyas coordenadas respecto a la base A son $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN:

(a) • Combinación lineal de “ B ” en “ A ”:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{b}_1 = \alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 \\ \bar{b}_2 = \beta_1 \bar{a}_1 + \beta_2 \bar{a}_2 \end{array} \right\} M_A^B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix}$$

$B \qquad A$

• Sustituyendo valores:

$$\left. \begin{array}{l} 1 = \alpha_1 \sin^2 x + \alpha_2 \cos^2 x \\ \cos 2x = \beta_1 \sin^2 x + \beta_2 \cos^2 x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{*Con identidades trigonométricas:} \\ 1 = \sin^2 x + \cos^2 x \\ \cos 2x = -\sin^2 x + \cos^2 x \end{array} \Rightarrow M_A^B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

• Calculando la inversa de la matriz anterior M_A^B :

$$(M_A^B)^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array} \right)$$

$$\therefore M_B^A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{Matriz de transición de “A” a “B”}$$

(b) • El vector de coordenadas respecto a la base B se obtiene multiplicando:

$$(\bar{v})_B = M_B^A \cdot (\bar{v})_A, \text{ donde } (\bar{v})_A = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{proporcionado como dato del problema}$$

• Sustituyendo valores:

$$(\bar{v})_B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2+2 \\ 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \therefore (\bar{v})_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{Vector de Coordenadas}$$