SUBTEMA: MATRICES ASOCIADAS A UNA TRANSFORMACIÓN

Problema 1: Sean $P_{\leq 2}$ y $P_{\leq 3}$ los espacios vectoriales de lo polinomios de grado menor o igual a dos y menor o igual a tres, respectivamente, y sea $T : P_{\leq 2} \to P_{\leq 3}$ la transformación definida por:

$$T(p(x)) = x \cdot p(x)$$

(a) Determinar la matriz asociada con T.
(b) Obtener la matriz asociada con T y referida a las bases:

$$A: \left\{1 - x^2, 1 + 3x + 2x^2, 5 + 4x + 4x^2\right\} \quad \text{y} \quad B: \left\{1, x, x^2, x^3\right\}$$

(c) Con las matrices de los incisos anteriores calcular la imagen del vector $\bar{v} = 1 + 5x - x^2$.

SOLUCIÓN:

(a) • Para obtener la matriz asociada con T, $M(T)$, se calculan las imágenes de la base canónica del dominio $P_{\leq 2} = \left\{a + bx + cx^2 \middle| a, b, c \in R\right\}$.

• Imágenes de $B_{canonica}$ $de\ P_{\leq 2} = \left\{1, x, x^2\right\}$:

$$T(1) = x$$
$$T(x) = x^2$$
$$T(x^2) = x^3$$

• Las imágenes anteriores escritas como columnas (aplicando isomorfismo) son las columnas de la matriz buscada:

$$\boxed{M(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \longleftarrow \text{Matriz asociada con } T$$

(b) • La imagen del vector $\bar{v} = 1 + 5x - x^2$ se determina con la expresión $T(\bar{v}) = M(T) \cdot \bar{v}$, es decir, multiplicando:

$$T(\bar{v}) = M(T)\cdot\bar{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{T(1+5x-x^2) = x+5x^2-x^3}$$

Imagen pedida
(obtenida con $M(T)$)

(c) • Para determinar la matriz asociada con T y referida a las bases A y B, se calculan primero las imágenes de los vectores de la base A:

$$T(1-x^2) = x - x^3 = T(\overline{a_1})$$
$$T(1+3x+2x^2) = x+3x^2+2x^3 = T(\overline{a_2})$$
$$T(5+4x+4x^2) = 5x+4x^2+4x^3 = T(\overline{a_3})$$

• Se escriben a las imágenes anteriores como combinación lineal de los vectores de la base B, es decir:

$$\boxed{T(\overline{a_1}) = x - x^3 = \alpha_1(1)+\alpha_2(x)+\alpha_3(x^2)+\alpha_4(x^3)}$$

Igualando términos: $\boxed{\alpha_1 = 0}$; $\alpha_2 x = x$ $\boxed{\alpha_2 = 1}$; $\alpha_3 x^2 = 0x^2$ $\boxed{\alpha_3 = 0}$; $\alpha_4 x^3 = -x^3$ $\boxed{\alpha_4 = -1}$ $\Bigg\}$ $\left[T(\overline{a_1})\right]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\boxed{T(\overline{a_2}) = x+3x^2+2x^3 = \beta_1+\beta_2 x+\beta_3 x^2+\beta_4 x^3}$$

Igualando términos: $\boxed{\beta_1 = 0}$; $\beta_2 x = x$ $\boxed{\beta_2 = 1}$; $\beta_3 x^2 = 3x^2$ $\boxed{\beta_3 = 3}$; $\beta_4 x^3 = 2x^3$ $\boxed{\beta_4 = 2}$ $\Bigg\}$ $\left[T(\overline{a_2})\right]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\boxed{T(\overline{a_3}) = 5x+4x^2+4x^3 = \gamma_1+\gamma_2 x+\gamma_3 x^2+\gamma_4 x^3}$$

Igualando términos: $\boxed{\gamma_1 = 0}$; $\gamma_2 x = 5x$ $\boxed{\gamma_2 = 5}$; $\gamma_3 x^2 = 4x^2$ $\boxed{\gamma_3 = 4}$; $\gamma_4 x^3 = 4x^3$ $\boxed{\gamma_4 = 4}$ $\Bigg\}$ $\left[T(\overline{a_3})\right]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

- Finalmente la matriz buscada es: $\boxed{M_B^A(T)=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&1&5\\0&3&4\\-1&2&4\end{bmatrix}}$ ← Matriz asociada con T y referida a las bases A y B

(d) • La imagen del vector $\bar{v}=1+5x-x^2$ se obtiene con la expresión:

$$\left[T(\bar{v})\right]_B=M_B^A(T)\cdot(\bar{v})_A$$

- Escribiendo a $\bar{v}=1+5x-x^2$ como combinación lineal de la base $A=\left\{1-x^2,1+3x+2x^2,5+4x+4x^2\right\}$, se tiene:

$$\bar{v}=\alpha(1-x^2)+\beta(1+3x+2x^2)+\gamma(5+4x+4x^2)$$
$$1+5x-x^2=(\alpha+\beta+5\gamma)+(3\beta+4\lambda)x+(-\alpha+2\beta+4\gamma)x^2$$

- Igualando términos:

$$\begin{aligned}&\alpha+\beta+5\gamma=1\\&3\beta+4\gamma=5\\&-\alpha+2\beta+4\gamma=-1\end{aligned}$$

- Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior matricialmente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&5&1\\0&3&4&5\\-1&2&4&-1\end{array}\right)(1)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&5&1\\0&3&4&5\\0&3&9&0\end{array}\right)(-1)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&5&1\\0&3&4&5\\0&0&5&-5\end{array}\right)(1/5)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&5&1\\0&3&4&5\\0&0&1&-1\end{array}\right)$$

- Se llega a:

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+5\gamma&=1\\3\beta+4\gamma&=5\\\boxed{\gamma=-1}\end{aligned}\ ;\ \text{donde:}\quad \beta=\frac{5-4\gamma}{3}=\frac{5-4(-1)}{3}\quad \boxed{\beta=3}\quad \text{y}\quad \left.\begin{aligned}\alpha&=1-\beta-5\gamma\\\alpha&=1-3-5(-1)\\\boxed{\alpha=3}\end{aligned}\right\}\ (\bar{v})_A=\begin{bmatrix}3\\3\\-1\end{bmatrix}$$

- Realizando la multiplicación:

$$\left[T(\bar{v})\right]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3+3-5 \\ 9-4 \\ -3+6-4 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}} \longleftarrow$$

Vector de coordenadas de $T(\bar{v})$ en la base B

- Escribiendo a $T(\bar{v})$ como combinación lineal de la base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$:

$$T(\bar{v}) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 = (0)(1) + (1)(x) + (5)(x^2) + (-1)(x^3)$$

- Se obtiene finalmente, la imagen pedida:

$$\boxed{T(1+5x-x^2) = x + 5x^2 - x^3} \longleftarrow$$

Imagen del vector $\bar{v}$ pedida (obtenida con $M_B^A(T)$)

Problema 2: Sea $H: R^2 \to R^2$ la transformación lineal cuya matriz asociada es $M_A^A(H) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, y donde $A = \{(-1,0),(0,2)\}$. Determinar:

(a) La regla de correspondencia de la transformación H.
(b) La imagen del vector $\bar{u} = (-1,3)$ utilizando la matriz $M_A^A(H)$.

SOLUCIÓN:

(a)
- A partir de la expresión $\left[H(\bar{v})\right]_A = M_A^A(H) \cdot (\bar{v})_A$ puede determinarse la regla de correspondencia de H, de la siguiente manera:

- Se propone al vector $\boxed{\bar{v} = (x, y) \in R^2}$.

- Se escribe a $\bar{v}$ como combinación lineal de la base A:

$$\bar{v} = \alpha(-1,0) + \beta(0,2) = (-\alpha, 2\beta)$$
$$(x, y) = (-\alpha, 2\beta)$$

- Igualando términos: $\boxed{\alpha = -x}$ $\boxed{\beta = \frac{1}{2}y}$ $\rightarrow$ $\boxed{\left(\bar{v}\right)_A = \begin{bmatrix} -x \\ \frac{1}{2}y \end{bmatrix}}$ $\longleftarrow$ Vector de coordenadas de $\bar{v}$ en la base A

- Multiplicando:

$$\left[H\left(\bar{v}\right)\right]_A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -x \\ \frac{1}{2}y \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} x+y \\ 2x+\frac{3}{2}y \end{bmatrix} = \left[H\left(\bar{v}\right)\right]_A} \longleftarrow$$

Vector de coordenadas de $H\left(\bar{v}\right)$ en la base A

- Escribiendo a $H\left(\bar{v}\right)$ como combinación lineal de la base A:

$$H\left(\bar{v}\right) = \gamma(-1,0) + \delta\left(0,2\right) = (x+y)(-1,0) + (2x+\tfrac{3}{2}y)(0,2) = (-x-y, 4x+3y)$$

- Se llega finalmente a:

$$\boxed{H\left(x,y\right) = \left(-x-y, 4x+3y\right)} \longleftarrow$$

Regla de correspondencia de H

(b) - La imagen de $\bar{u}$ se determina con la misma expresión $\left[H(\bar{u})\right]_A = M_A^A(H)\cdot(\bar{u})_A$.

- Se escribe a $\bar{u}$ como combinación lineal de la base A:

$$\bar{u} = \alpha\left(-1,0\right) + \beta(0,2)$$
$$(-1,3) = (-\alpha, 2\beta)$$

- Igualando términos: $\boxed{\alpha = 1}$ $\boxed{\beta = 3/2}$ $\rightarrow$ $\boxed{\left(\bar{u}\right)_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}}$ $\longleftarrow$ Vector de coordenadas de $\bar{u}$ en la base A

- Multiplicando:

$$\left[H\left(\bar{u}\right)\right]_A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+3 \\ -2+9/2 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 \\ 5/2 \end{bmatrix} = \left[H\left(\bar{u}\right)\right]_A} \longleftarrow$$

Vector de coordenadas de $H\left(\bar{u}\right)$ en la base A

- Escribiendo a $H\left(\bar{u}\right)$ como combinación lineal de la base A:

$$H\left(\bar{u}\right)=\gamma\left(-1,0\right)+\delta\left(0,2\right)=(2)(-1,0)+(5/2)(0,2)=(-2,0)+(0,5)=\boxed{(-2,5)}$$

- Se obtiene finalmente:

$$\boxed{H\left(\bar{u}\right)=(-2,5)} \longleftarrow \text{Imagen del vector } \bar{u}$$

Problema 3: Sea la transformación lineal $S: R^2 \to R^3$, cuya matriz asociada es $M_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, referida a las bases $A = \{(1,1),(0,-1)\}$ del dominio y $B = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$ del codominio. Determinar la regla de correspondencia de la transformación S.

SOLUCIÓN:

- Para determinar la regla de correspondencia se utiliza la expresión:

$$M_B^A\,(\mathrm{S})\cdot(\bar{\mathrm{v}})_{\mathrm{A}}=\left[\mathrm{T}(\bar{\mathrm{v}})\right]_{\mathrm{B}}$$

- Se propone al vector $\boxed{\bar{v} = (\mathrm{x,y}) \in R^2}$.

- Se escribe a $\bar{v}$ como combinación lineal de la base A: $\boxed{\bar{v} = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2}$.

- Sustituyendo e igualando términos se obtiene:

$$(x,y) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(0,\text{-}1) = (\alpha_1, \alpha_1 - \alpha_2)$$

$$\therefore \boxed{\alpha_1 = \mathrm{x}} \qquad \boxed{\alpha_2 = \mathrm{x\text{-}y}}$$

$$\left(\bar{v}\right)_A = \left(\alpha_1,\alpha_2\right)^T = \begin{bmatrix} x \\ x-y \end{bmatrix} \longleftarrow \text{Vector de coordenadas de } \bar{v} \text{ en la base } A$$

- Realizando la multiplicación $M_B^A(\mathrm{S})(\bar{\mathrm{v}})_A = \left[S(\bar{v})\right]_B$, se obtiene el vector de coordenadas de $S\left(\bar{\mathrm{v}}\right)$ en la base B:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{x} \\ \text{x-y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{x} + \text{x-y} \\ 0 + \text{x-y} \\ \text{x} + 0 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} \text{2x-y} \\ \text{x-y} \\ \text{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \left[S\left(\bar{v}\right) \right]_B}$$

- Escribiendo a $S\left(\bar{\text{v}}\right)$ como combinación lineal de $\bar{v}$:

$$S\left(\bar{v}\right) = \beta_1\, \overline{b_1} + \beta_2\, \overline{b_2} + \beta_3\, \overline{b_3}$$

- Sustituyendo valores:

$$S\left(\bar{v}\right) = \left(\text{2x-y}\right)\left(1,0,1\right) + \left(x-y\right)\left(0,1,1\right) + \text{x}\left(1,1,0\right)$$
$$S\left(\bar{v}\right) = \left(\text{2x-y},\text{x-y}+\text{x},\text{2x-y}+\text{x-y}\right) = \left(\text{3x-y},\text{2x-y},\text{3x-2y}\right)$$

- Se llega finalmente a:

$\boxed{S\left(x,y\right) = \left(3x-y, 2x-y, 3x-2y\right)} \longrightarrow$ Regla de correspondencia pedida