SUBTEMA: ESPACIOS VECTORIALES

Problema 1: Sea $V = \{a\}$ el conjunto con el único elemento "a". Determinar si V es un Espacio Vectorial sobre los reales con las operaciones de adición y multiplicación por un escalar definidas por:

$\oplus$: a + a = a
$\otimes$: $\alpha \cdot$a = a $\quad \forall \ \alpha \in R$

<u>SOLUCIÓN:</u>

1.- Cerradura para la suma: $\quad \bar{u} + \bar{v} = \bar{x} \in V$

$\boxed{a + a = a \in V}$ $\leftarrow$ cumple por definición

2.- Conmutativad de la suma: $\quad \bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$

a + a = a +a

$\boxed{a = a}$ $\leftarrow$ cumple

3.- Asociatividad de la suma: $\quad \bar{u} + \bar{v} + \bar{w} = \bar{u} + \bar{v} + \bar{w}$

a + [a + a] = [a + a] + a

a + a = a + a

$\boxed{a = a}$ $\leftarrow$ cumple

4.- Existencia de vector neutro: $\quad \bar{e} = a$

*Izquierda: $\bar{e} + \bar{u} = \bar{u}$ $\qquad$ *Derecha: $\bar{u} + \bar{e} = \bar{u}$

a + a = a $\qquad$ a + a = a

$\boxed{a = a}$ $\leftarrow$ cumple $\rightarrow$ $\boxed{a = a}$

5.- Existencia de inverso aditivo: $\quad \bar{z} = a$

*Izquierda: $\bar{z} + \bar{u} = \bar{u}$ $\qquad$ *Derecha: $\bar{u} + \bar{z} = \bar{u}$

a + a = a $\qquad$ a + a = a

$\boxed{a = a}$ $\leftarrow$ cumple $\rightarrow$ $\boxed{a = a}$

6.-Cerradura para la multiplicación: $\quad \alpha \cdot \bar{u} = \bar{y} \in V$

$\boxed{\alpha \cdot a = a \in V}$ $\leftarrow$ cumple por definición

7.- Distributiva de la multiplicación para la suma de vectores: $\alpha \ \bar{u} + \bar{v} \ = \alpha\bar{u} + \alpha\bar{v}$

$$\alpha\,(a + a) = \alpha\cdot a + \alpha\cdot a$$
$$\alpha\cdot a = a + a$$
$$\boxed{a = a} \leftarrow \text{ cumple}$$

8.- Distributiva de la multiplicación para la suma de escalares: $(\alpha + \beta)\,\bar{u} = \alpha\bar{u} + \beta\bar{u}$

$$(\alpha + \beta)\cdot a = \alpha\cdot a + \beta\cdot a$$
$$a = a + a$$
$$\boxed{a = a} \leftarrow \text{ cumple}$$

9.- Asociativa de la multiplicación: $\alpha\,(\beta\bar{u}) = (\alpha\beta)\,\bar{u}$

$$\alpha\cdot(\beta\cdot a) = (\alpha\cdot\beta)\cdot a$$
$$\alpha\cdot a = a$$
$$\boxed{a = a} \leftarrow \text{ cumple}$$

10.- Unicidad: $1\cdot\bar{u} = \bar{u}$

$$1\cdot a = a$$
$$\boxed{a = a} \leftarrow \text{ cumple}$$

Por tanto, "*V*" <u>sí es</u> un Espacio Vectorial sobre los reales.

Problema 2: Sea el conjunto $A = \{(x,y) \mid x,y \in R\}$ y las operaciones de adición y multiplicación por un escalar definidas por:

$\oplus$: $\bar{u} + \bar{v} = (x_1 + y_2, x_2 + y_1)\ \forall\ \bar{u} = (x_1,x_2);\ \bar{v} = (y_1,y_2) \in A$
$\otimes$: $\alpha\bar{u} = (\alpha x_1, x_2)\ \forall\ \alpha \in R$ y $\bar{u} = (x_1,x_2) \in A$

Determinar si *A* tiene estructura de Espacio Vectorial.

<u>SOLUCIÓN:</u>

1.- Cerradura para la suma: $\bar{u} + \bar{v} = \bar{x} \in A$

$$\boxed{\bar{u} + \bar{v} = (x_1 + y_2, x_2 + y_1) \in A} \leftarrow \text{ cumple por definición}$$

2.- Conmutativad de la suma: $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$

$$(x_1,x_2) + (y_1,y_2) = (y_1,y_2) + (x_1,x_2)$$
$$\boxed{(x_1 + y_2, x_2 + y_1) \neq (y_1 + x_2, y_2 + x_1)} \leftarrow \text{ no cumple}$$

3.- Asociatividad de la suma: $\bar{u} + \bar{v} + \bar{w} = \bar{u} + \bar{v} + \bar{w}$

$$(x_1,x_2) + [(y_1,y_2) + (w_1,w_2)] = [(x_1,x_2) + (y_1,y_2)] + (w_1,w_2)$$
$$(x_1,x_2) + (y_1+w_2,y_2+w_1) = (x_1 + y_2,x_2 + y_1) +(w_1,w_2)$$
$$\boxed{(x_1+y_2+w_1,x_2+y_1+w_2) \neq (x_1+y_2+w_2,x_2+y_1+w_1)} \leftarrow \text{ no cumple}$$

4.- Existencia de vector neutro: $\bar{e} = (e_1, e_2)$

*Derecha: $\bar{u} + \bar{e} = \bar{u}$

$(x_1,x_2) + (e_1, e_2) = (x_1, x_2)$

$(x_1+e_2,x_2+e_1) = (x_1,x_2)$

Igualando términos:

$x_1+e_2 = x_1$ $\quad$ $x_2+e_1 = x_2$

$e_2 = 0$ $\quad$ $e_1 = 0$

$$\boxed{\bar{e} = (0,0)}$$

*Izquierda: $\bar{e} + \bar{u} = \bar{u}$

$(0,0) + (x_1,x_2) = (x_1,x_2)$

$(0+ x_2,0+ x_1) = (x_1,x_2)$

$\boxed{(x_2,x_1) \neq (x_1,x_2)}$

No existe vector neutro,

$\therefore$ no se cumple el axioma

5.- Existencia de inverso aditivo: $\bar{z} = (z_1, z_2)$

Puesto que no existe vector neutro, entonces no existe inverso-aditivo,
$\therefore$ no se cumple el axioma

6.-Cerradura para la multiplicación: $\alpha \cdot \bar{u} = \bar{y} \in V$

$$\boxed{\alpha\cdot(x_1, x_2) = (\alpha x_1,x_2) \in V} \leftarrow \text{ cumple por definición}$$

7.- Distributiva de la multiplicación para la suma de vectores: $\alpha\ \bar{u} + \bar{v} = \alpha\bar{u} + \alpha\bar{v}$

$$\alpha\ [(x_1,x_2) + (y_1,y_2)] = \alpha(x_1,x_2) + \alpha(y_1,y_2)$$
$$\alpha\ (x_1+y_2,x_2+y_1) = (\alpha x_1,x_2) + (\alpha y_1,y_2)$$
$$\boxed{(\alpha x_1+\alpha y_2,x_2+y_1) \neq (\alpha x_1+y_2,x_2+\alpha y_1)} \leftarrow \text{ no cumple}$$

8.- Distributiva de la multiplicación para la suma de escalares: $\alpha + \beta\ \bar{u} = \alpha\bar{u} + \beta\bar{u}$

$$(\alpha + \beta)\ (x_1,x_2) = \alpha(x_1,x_2) + \beta(x_1,x_2)$$
$$(\alpha x_1 + \beta x_1,x_2) = (\alpha x_1,x_2) + (\beta x_1,x_2)$$
$$\boxed{(\alpha x_1 + \beta x_1,x_2) \neq (\alpha x_1+x_2,x_2+\beta x_1)} \leftarrow \text{ no cumple}$$

9.- Asociativa de la multiplicación: $\alpha\ \beta\bar{u} = \alpha\beta\ \bar{u}$

$$\alpha\cdot[\beta\cdot(x_1,x_2)] = (\alpha\cdot\beta)\ (x_1,x_2)$$
$$\alpha\cdot(\beta\cdot x_1,x_2) = (\alpha\cdot\beta\cdot x_1,x_2)$$
$$\boxed{(\alpha\cdot\beta\cdot x_1,x_2) = (\alpha\cdot\beta\cdot x_1,\cdot x_2)} \leftarrow \text{ cumple}$$

10.- Unicidad: $1\cdot\bar{u}=\bar{u}$

$1\cdot(x_1,x_2) = (x_1,x_2)$

$\boxed{(x_1,x_2) = (x_1,x_2)}$ ← cumple

Por tanto, "*A*" no es un Espacio Vectorial sobre los reales.

Problema 3: Sea el conjunto $F = \{(x,y) \mid x>0;\ y>0;\ x,\ y \in R\}$, el campo de los reales y la adición y multiplicación por un escalar definidas por:

$\oplus$: $\bar{u}+\bar{v} = (x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1+x_2,y_1+y_2)\ \forall\ \bar{u} = (x_1,y_1);\ \bar{v} = (x_2,y_2) \in F$

$\otimes$: $\alpha\cdot\bar{u} = \alpha\cdot(x_1,y_1) = (\alpha x_1,\alpha y_1)\ \forall\ \alpha \in R$ y $\bar{u} = (x_1,y_1) \in F$

Si por todo $\forall\ (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) \in F$ y $\alpha, \beta \in R$ se cumple que:

1.- $(x_1,y_1) + (x_2,y_2) \in F$ ← cerradura para la suma
2.- $(x_1,y_1) + [(x_2,y_2) + (x_3,y_3)] = [(x_1,y_1) + (x_2,y_2)] + (x_3,y_3)$ ← Asociativa de la suma
3.- $(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_2,y_2) + (x_1,y_1)$ ← Conmutativa de la suma
4.- $1\cdot(x_1,y_1) = (x_1,y_1) \in F$, donde uno es la unidad del campo R ← Unicidad
5.- $\alpha\cdot[\beta\cdot(x_1,y_1)] = (\alpha\beta)\cdot(x_1,y_1)$ ← Asociativa de la multiplicación (no cumple si α ó $\beta\leq 0$)

Determinar si *F* es un Espacio Vectorial sobre *R*; en caso de afirmativo dar al vector neutro; en caso negativo, decir cuales axiomas no se cumplen.

SOLUCIÓN:

Se verifican únicamente los axiomas que no se dieron:

6.- Existencia de vector neutro: $\bar{e}=(e_1,e_2)$

*Izquierda: $\bar{e}+\bar{u}=\bar{u}$

$(e_1,e_2), (x_1,y_1) = (x_1,y_1)$

$(e_1 + x_1,e_2 + y_1) = (x_1,y_1)$

Igualando:

$e_1 + x_1 = x_1$ $e_2 + y_1 = y_1$

$e_1 = 0$ $e_2 = 0$

$\therefore\ \boxed{\bar{e} = (0,0)} \notin F$ ← no cumple →

*Derecha: $\bar{u}+\bar{e}=\bar{u}$

$(x_1,y_1) + (e_1,e_2) = (x_1,y_1)$

$(x_1+e_1,y_1+e_2) = (x_1,y_1)$

Igualando:

$x_1 + e_1= x_1$ $y_1 + e_2 = y_1$

$e_1 = 0$ $e_2 = 0$

$\therefore\ \boxed{\bar{e} = (0,0)} \notin F$

7.- Existencia de inverso aditivo: $\bar{z}=(z_1,z_2)$

*Izquierda: $\bar{z}+\bar{u}=\bar{e}$

$(z_1,z_2) + (x_1,y_1) = (0,0)$

$(z_1+x_1,z_2+y_1) = (0,0)$

*Derecha: $\bar{u}+\bar{z}=\bar{e}$

$(x_1,y_1))+(z_1,z_2) = (0,0)$

$(x_1+z_1,\ y_1+z_2) = (0,0)$

Igualando:

$z_1+x_1 = 0 \qquad z_2+y_1 = 0$

$z_1 = -x_1 \qquad z_2 = -y_1$

$\therefore \boxed{\bar{z} = (-x_1,-y_1)} \notin F \quad \leftarrow \quad$ no cumple $\quad \rightarrow \quad \therefore \boxed{\bar{z} = (-x_1,-y_1)} \notin F$

Igualando:

$x_1+z_1 = 0 \qquad y_1+z_2 = 0$

$z_1 = -x_1 \qquad z_2 = -y_1$

8.-Cerradura para la multiplicación: $\alpha \cdot \bar{u} = \bar{y} \in V$

$\boxed{\alpha\cdot(x_1,y_1) = (\alpha x_1,\alpha y_1)} \in F \leftarrow$ no cumple si $\alpha \leq 0$

9.- Distributiva de la multiplicación para la suma de vectores: $\alpha \ \bar{u}+\bar{v} \ = \alpha\bar{u}+\alpha\bar{v}$

$$\alpha\cdot[(x_1,y_1) + (x_2,y_2)] = \alpha\cdot(x_1,y_1) + \alpha\cdot(x_2,y_2)$$
$$\alpha\cdot(x_1+x_2,y_1+y_2) = (\alpha x_1,\alpha y_1) + (\alpha x_2,\alpha y_2)$$
$$\boxed{(\alpha\cdot x_1 + \alpha\cdot x_2,\alpha\cdot y_1 + \alpha\cdot y_2) = (\alpha\cdot x_1 + \alpha\cdot x_2,\alpha\cdot y_1+ \alpha\cdot y_2)} \leftarrow \text{ no cumple si } \alpha \leq 0$$

10.- Distributiva de la multiplicación para la suma de escalares: $\alpha+\beta \ \bar{u} = \alpha\bar{u}+\beta\bar{u}$

$$(\alpha + \beta)\cdot(x_1,y_1) = \alpha\cdot(x_1,y_1) + \beta\cdot(x_1,y_1)$$
$$(\alpha\cdot x_1 + \beta\cdot x_1,\alpha\cdot y_1 + \beta\cdot y_1) = (\alpha\cdot x_1,\alpha\cdot y_1) + (\beta\cdot x_1,\beta\cdot y_1)$$
$$\boxed{(\alpha\cdot x_1 + \beta\cdot x_1,\alpha\cdot y_1+ \beta\cdot y_1) = (\alpha\cdot x_1 + \beta\cdot x_1,\alpha\cdot y_1+ \beta\cdot y_1)} \leftarrow \text{ no se cumple si } \alpha=\beta=0$$

Por tanto, el conjunto *F* no es un espacio vectorial sobre el campo de los reales.