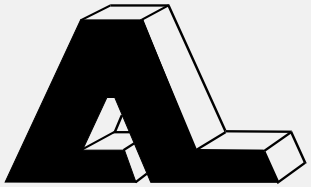
Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas
Coordinación de Matemáticas



Álgebra Lineal

Efectos geométricos de las transformaciones lineales

Dra. Norma Patricia López Acosta
Profesora de la Facultad de Ingeniería, UNAM
Investigadora del Instituto de Ingeniería, UNAM

Ciudad Universitaria, México, D.F., julio de 2013

ÍNDICE

EFECTOS GEOMÉTRICOS DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

1. Definición
2. Representación matricial
3. Geometría de las transformaciones lineales
4. Resumen
5. Otros operadores
6. Ejemplos

1. Definición

Si el dominio de una función *f* es R^n y el codominio es R^m (*m* y *n* quizás iguales), entonces *f* se denomina ***transformación*** de R^n a R^m, y se dice que *f* mapea (aplica o transforma) R^n en R^m. Esto se denota escribiendo $f: R^n \rightarrow R^m$.

Ilustración:

$$\begin{aligned} w_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ w_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ w_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Si se considera:

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$$

Entonces se puede escribir:

$$T : R^n \rightarrow R^m$$

2. Representación matricial

Entonces, una transformación lineal $T: R^n \rightarrow R^m$ puede estar definida por ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ w_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ w_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

En notación matricial:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

En notación más compacta:

$$\boldsymbol{w = A\,x}$$

La matriz $\boldsymbol{A}$ se conoce como matriz asociada a la transformación (es su *representación matricial*).

Ejemplo 1. La transformación lineal $T: R^4 \rightarrow R^3$, definida por las ecuaciones:

$$w_1 = 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4$$
$$w_2 = 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4$$
$$w_3 = 5x_1 - x_2 + 4x_3$$

Se puede expresar en forma matricial como:

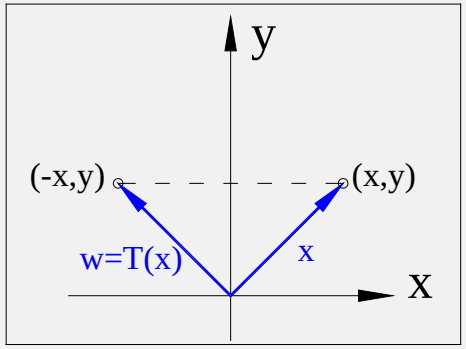
$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Así, la imagen del vector $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (1,-3,0,2)$, se puede calcular con:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

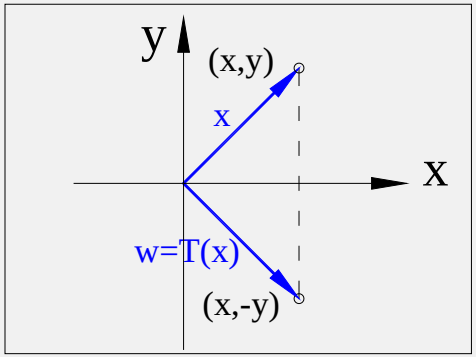
3. Geometría de las transformaciones lineales

➢ OPERADORES REFLEXIÓN (en el plano)



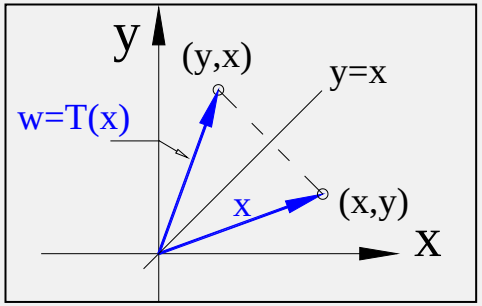
Reflexión respecto al eje “y”

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Reflexión respecto al eje “x”

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

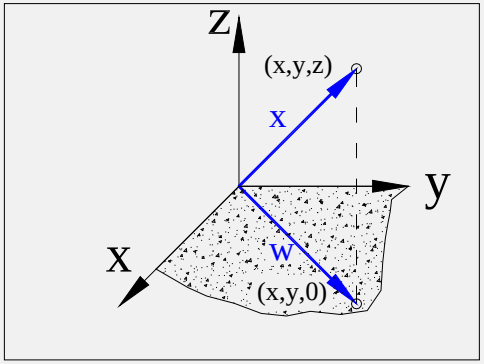


Reflexión respecto al eje “y=x”

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

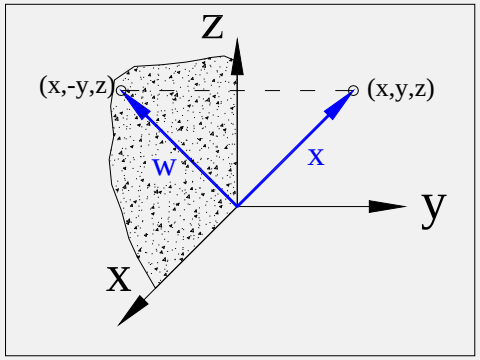
3. Geometría de las transformaciones lineales

➢ OPERADORES REFLEXIÓN (en el espacio)



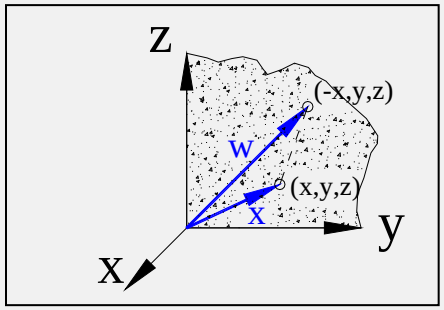
Reflexión respecto al plano “x-y”

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



Reflexión respecto al plano “x-z”

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

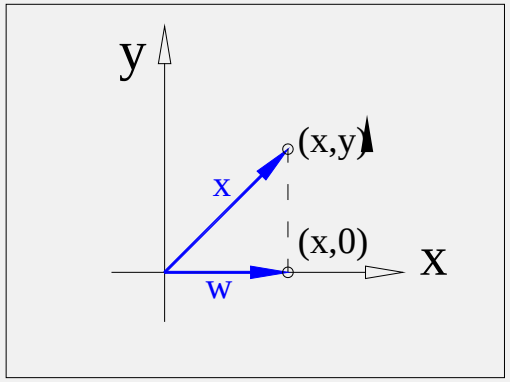


Reflexión respecto al plano “y-z”

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

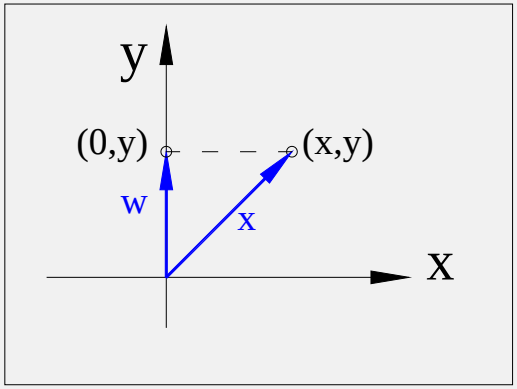
3. Geometría de las transformaciones lineales

➢ OPERADORES PROYECCIÓN ORTOGONAL (en el plano)



Proyección ortogonal sobre el eje “x”

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

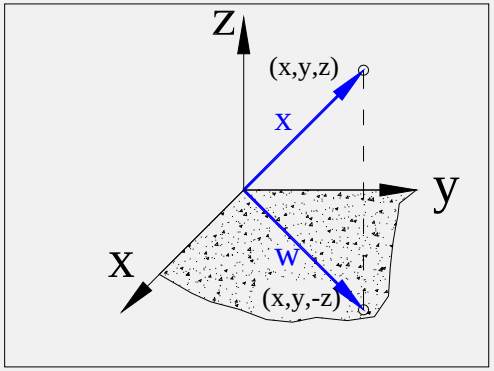


Proyección ortogonal sobre el eje “y”

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Geometría de las transformaciones lineales

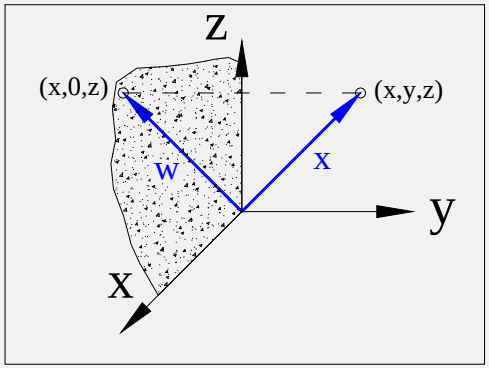
➢ OPERADORES PROYECCIÓN ORTOGONAL (en el espacio)



Proyección ortogonal sobre el plano “x-y”

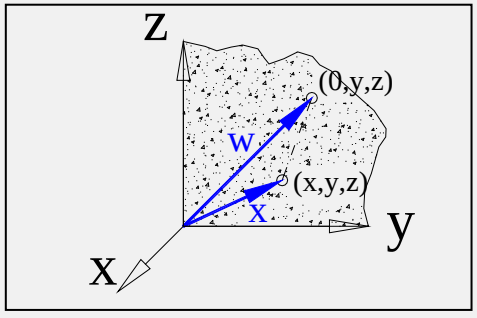
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La interpretación geométrica de la transformación $T(x, y, z) = (x, y)$, donde (x,y,z) representa un segmento dirigido cualquiera del espacio cartesiano tridimensional, T transforma dicho segmento en su proyección sobre el plano X-Y.



Proyección ortogonal sobre el plano “x-z”

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

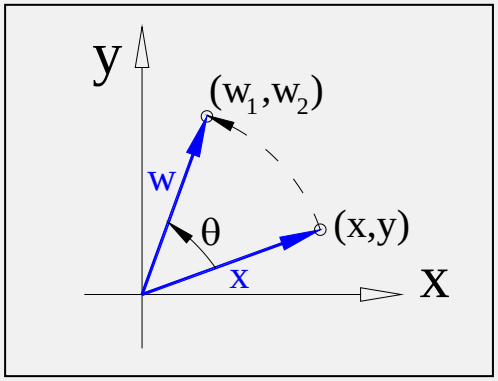


Proyección ortogonal sobre el plano “y-z”

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Geometría de las transformaciones lineales

➢ OPERADOR ROTACIÓN (en el plano)



Rotación a través de un ángulo "θ"

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

➢ OPERADOR TRASLACIÓN

T*(*x*) = *x* + *b si ***b* ≠ 0**, esta transformación es no lineal, a esta transformación se le llama traslación por ***b***.

Una **traslación por un vector *b* ≠ 0 desplaza una figura sumando *b* a todos sus puntos.**

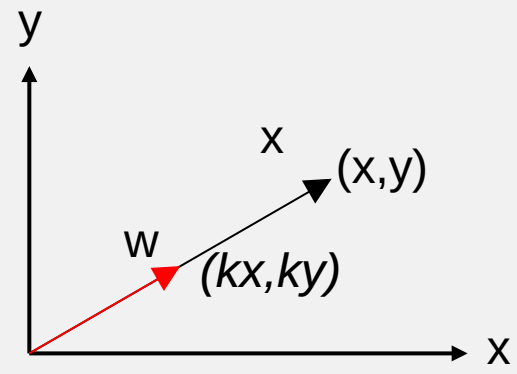
Ejemplo: $T(x) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Rotación de 45° seguida de una traslación por (-2,0)

Transformación afin → Transformación lineal seguida de una traslación.

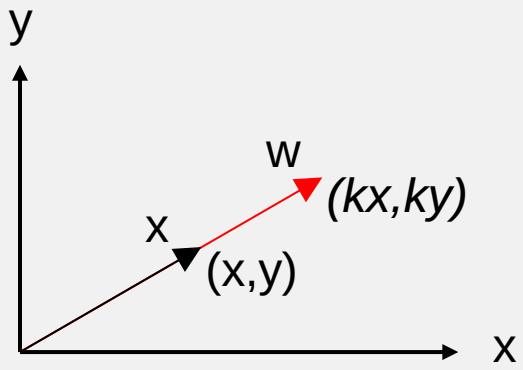
3. Geometría de las transformaciones lineales

➢ OPERADORES CONTRACCIÓN Y DILATACIÓN (en el plano)



Contracción con factor *k* sobre R^2

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

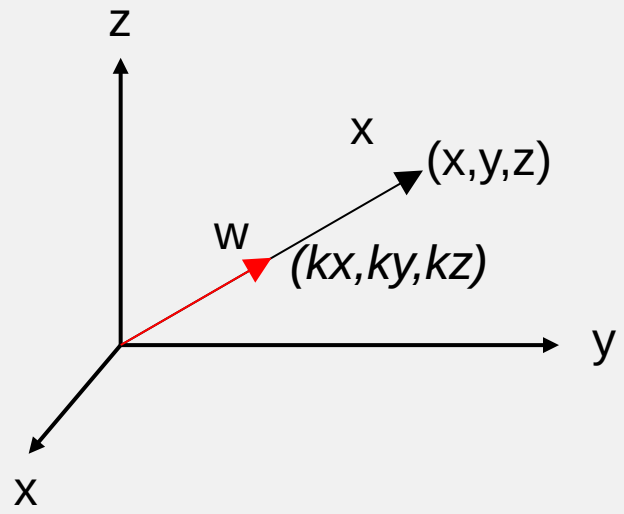


Dilatación con factor *k* sobre R^2

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

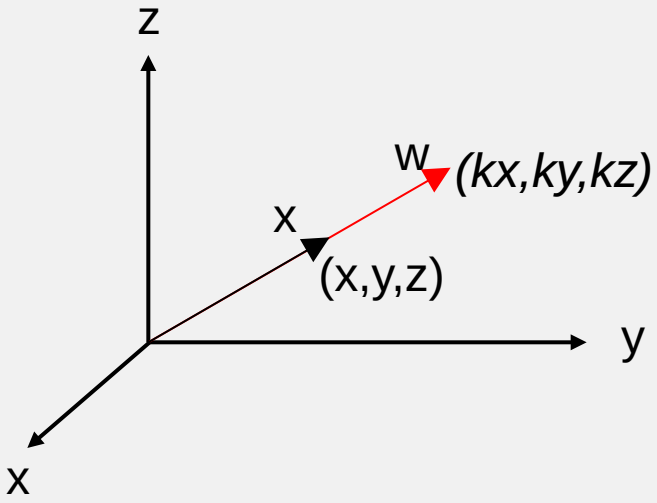
3. Geometría de las transformaciones lineales

➢ OPERADORES CONTRACCIÓN Y DILATACIÓN (en el espacio)



Contracción con factor *k* sobre R^3

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$



Dilatación con factor *k* sobre R^3

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

4. Resumen

Reflexiones	Transforman un vector (o un punto) en su imagen simétrica.
Proyecciones	Transforman cada vector en su proyección ortogonal.
Rotaciones	Giran un vector hasta describir un ángulo fijo.
Traslaciones	Desplazan un vector sumando o restando una cantidad *b* a todos sus puntos.
Contracciones	Comprimen cada vector por un factor *k*.
Dilataciones	Estiran cada vector por un factor *k*.

5. Otros operadores

Existen otras transformaciones (u operadores) denominadas ***"cortes"*** cuyo efecto es distorsionar un vector a lo largo de uno o ambos ejes.

También es posible definir una ***"composición de transformaciones lineales"***. Por ejemplo, se puede describir el movimiento de un vector que primero gira en el sentido horario, luego refleja el vector resultante respecto a un plano y finalmente proyecta ortogonalmente el vector sobre otro plano.

Ejemplo 2. Encontrar la matriz de transformación A_T correspondiente a la proyección de un vector en R^3 sobre el plano *xy*.

Solución:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Proyección del vector

Ecuación del plano

En particular, $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

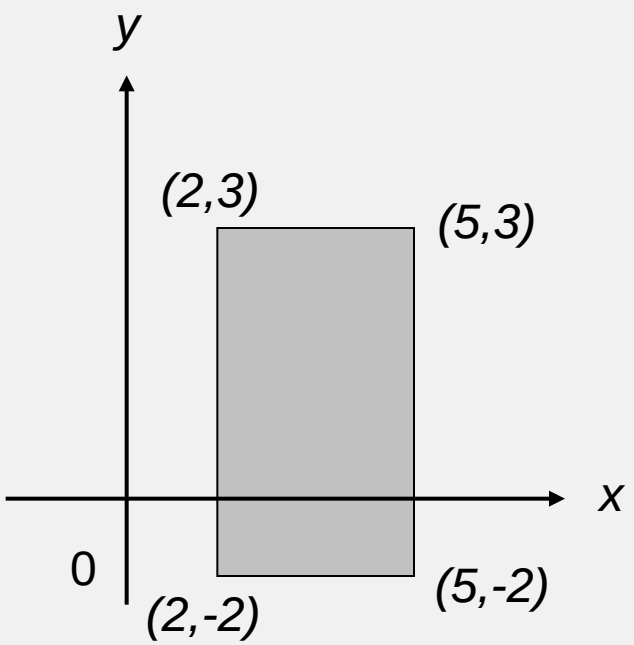
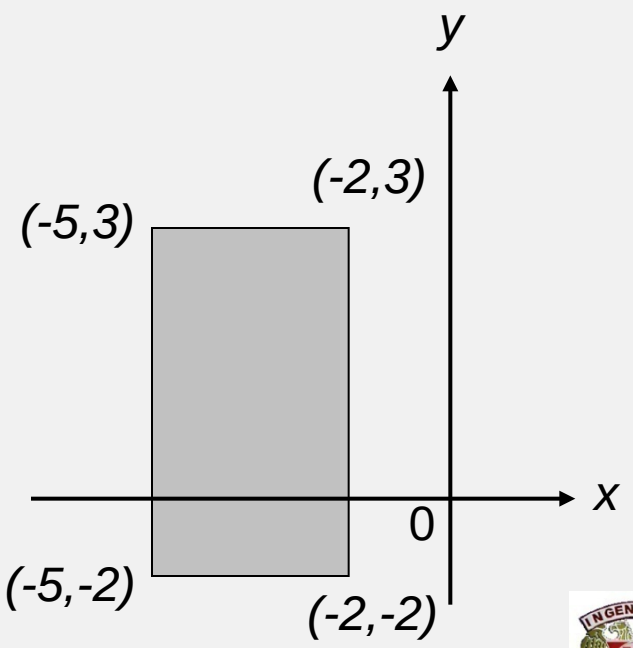
De donde: $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Comprobando: $A_T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

Ejemplo 3. Escriba la representación matricial de *2x2* de la transformación lineal:

Reflexión respecto al eje "y",

y dibuje la región obtenida al aplicar esa transformación a la región sombreada dada.

Sol.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$