SUBTEMA: DESIGUALDAD DEL TRIÁNGULO

Problema 1: Verificar que los vectores $\overline{z}=(1+5i,i)$ y $\overline{w}=(5-i,i)$ que pertenecen al espacio vectorial C^2, satisfacen la desigualdad del triángulo respecto al producto interno definido por:

$$\left(\overline{z}\middle|\overline{w}\right)=5z_1\overline{w_1}+z_2\overline{w_2} \qquad \forall\ \overline{z}=(z_1,z_2),\ \overline{w}=(w_1,w_2)\ \in C^2$$

donde $\overline{w_1}$ y $\overline{w_2}$ son los conjugados de w_1 y w_2, respectivamente.

SOLUCIÓN:

* La desigualdad del triángulo es:

$$\left\|\overline{z}+\overline{w}\right\|\leq\left\|\overline{z}\right\|+\left\|\overline{w}\right\|$$

* La sumatoria es:

$$\overline{z}+\overline{w}=(1+5i,i)+(5-i,i)=(1+5i+5-i,i+i)=(6+4i,2i)$$

$$\boxed{\overline{z}+\overline{w}=(6+4i,2i)}$$

* Calculando los productos internos necesarios:

a) $$\begin{aligned}\left(\overline{z}+\overline{w}\middle|\overline{z}+\overline{w}\right)=\left[(6+4i,2i)\middle|(6+4i,2i)\right]&=5(6+4i)\overline{(6+4i)}+(2i)\overline{(2i)}\\ &=5(6+4i)(6-4i)+(2i)(-2i)\\ &=5(36-24i+24i-16i^2)+(-4i^2)\\ &=5(36+16)+4\\ &=5(52)+4\\ &=260+4\end{aligned}$$

$$\boxed{\left(\overline{z}+\overline{w}\middle|\overline{z}+\overline{w}\right)=264}$$

$$\therefore\ \boxed{\left\|\overline{z}+\overline{w}\right\|=\sqrt{264}}$$

b) $\left(\bar{z}\middle|\bar{z}\right)=\left[(1+5i,i)\middle|(1+5i,i)\right]=5(1+5i)(1-5i)+(i)(-i)$

$$=5(1+25)+1$$
$$=5(26)+1$$
$$=130+1$$
$$\boxed{\left(\bar{z}\middle|\bar{z}\right)=131}$$

$$\therefore \boxed{\left\|\bar{z}\right\|=\sqrt{131}}$$

c) $\left(\bar{w}\middle|\bar{w}\right)=\left[(5-i,i)\middle|(5-i,i)\right]=5(5-i)(5+i)+(i)(-i)$

$$=5(25+1)+1$$
$$=130+1$$
$$\boxed{\left(\bar{w}\middle|\bar{w}\right)=131}$$

$$\therefore \boxed{\left\|\bar{w}\right\|=\sqrt{131}}$$

* Sustituyendo valores en la desigualdad del triángulo:

$$\left\|\bar{z}+\bar{w}\right\|\le\left\|\bar{z}\right\|+\left\|\bar{w}\right\|$$

$$\sqrt{264}\le\sqrt{131}+\sqrt{131}$$
$$\sqrt{264}\le 2\sqrt{131}$$
$$\sqrt{264}\le\sqrt{4(131)}$$
$$264\le 524$$

* Por tanto:

$\boxed{264<524}$ $\leftarrow$ Se cumple la desigualdad del triángulo