SUBTEMA: COMPLEMENTO ORTOGONAL

Problema 1: Sean $M_{2\times2}$ el espacio vectorial de las matrices de 2×2 con elementos reales sobre el campo de los reales y $W=\left\{\left[\begin{matrix}-a & b\\ b & a\end{matrix}\right]\middle| a,b\in R\right\}$ un subespacio de $M_{2\times2}$. Con el producto interno en $M_{2\times2}$ definido por:

$$\left(A\middle|B\right)=tr\left(AB^T\right)\quad\forall\ A,B\in M_{2\times2}$$

Determinar:

(a) El complemento ortogonal de *W*.

(b) La matriz de *A* cuya distancia a la matriz $B=\left[\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}\right]$ sea mínima.

SOLUCIÓN:

(a) El complemento ortogonal se determina con: $W^{\perp}=\left\{\bar{v}\in M_{2\times2}\middle|\left(\bar{v}\middle|\bar{u}\right)=0;\forall\ \bar{u}\in W\right\}$.

- Se proponen los vectores: $\bar{v}=\left[\begin{matrix}x & y\\ z & w\end{matrix}\right]\in M_{2\times2}$ y $\bar{u}=\left[\begin{matrix}-a & b\\ b & a\end{matrix}\right]\in W$.

- Se realiza el producto interno $\left(\bar{v}\middle|\bar{u}\right)=0$:

$$\left(\bar{v}\middle|\bar{u}\right)=\left(\left[\begin{matrix}x & y\\ z & w\end{matrix}\right]\middle|\left[\begin{matrix}-a & b\\ b & a\end{matrix}\right]\right)=tr\left(\left[\begin{matrix}x & y\\ z & w\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}-a & b\\ b & a\end{matrix}\right]\right)$$

$$=tr\left(\left[\begin{matrix}-ax+by & bx+ay\\ -az+bw & bz+aw\end{matrix}\right]\right)=-ax+by+bz+aw$$

$$\boxed{=a(-x+w)+b(y+z)=0}$$

- Para que se cumpla la expresión anterior: $\underbrace{a}_{\neq0}\underbrace{(-x+w)}_{=0}+\underbrace{b}_{\neq0}\underbrace{(y+z)}_{=0}=0$

• Es decir:
$$-x+w=0 \quad \rightarrow \quad \boxed{x=w}$$
$$y+z=0 \quad \rightarrow \quad \boxed{y=-z}$$

• Con los valores anteriores, el vector $\bar{v}=\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}$ propuesto, se transforma en $\boxed{\bar{v}=\begin{bmatrix} w & -z \\ z & w \end{bmatrix}}$.

• Finalmente:

$$\boxed{W^{\perp}=\left\{\begin{bmatrix} w & -z \\ z & w \end{bmatrix} \middle| w,z \in R\right\}} \leftarrow \text{Complemento ortogonal}$$

• Otra solución para determinar el complemento ortogonal es considerar el mismo vector $\bar{v}=\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}$, y como vectores $\bar{u}$, a los vectores de la base canónica del subespacio *W*:

$$B_{can.}=\left\{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$
$$\uparrow \qquad \uparrow$$
$$\bar{u}_1 \qquad \bar{u}_2$$

• Y realizando los productos internos:

$$\left(\bar{v}\middle|\bar{u}_1\right)=\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)=tr\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$
$$=tr\left(\begin{bmatrix} -x & y \\ -z & w \end{bmatrix}\right)=\boxed{-x+w=0} \quad \rightarrow \quad \boxed{x=w}$$

$$\left(\overline{v}\middle|\overline{u_2}\right)=\left(\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)=tr\left(\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$=tr\left(\begin{bmatrix}y & x\\ w & z\end{bmatrix}\right)=\boxed{y+z=0}\quad\rightarrow\quad\boxed{y=-z}$$

• Obteniéndose, al igual que en la primera solución, que el vector $\overline{v}$ inicial se transforma en $\boxed{\overline{v}=\begin{bmatrix}w & -z\\ z & w\end{bmatrix}}$, y por consiguiente el complemento ortogonal es: $\boxed{W^{\perp}=\left\{\begin{bmatrix}w & -z\\ z & w\end{bmatrix}\middle| w,z\in R\right\}}$.

(b) Para determinar la matriz *A* cuya distancia a la matriz $C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ sea mínima, se utiliza:

$$\boxed{C=A+B}\ \text{ donde }\ A\in W\ ;\ B\in W^{\perp}\ \text{ y }\ C\in M_{2\times 2}$$

• Considerando los vectores: $A=\begin{bmatrix}-a & b\\ b & a\end{bmatrix}\in W$ y $B=\begin{bmatrix}w & -z\\ z & w\end{bmatrix}\in W^{\perp}$, y sustituyendo valores en la sumatoria anterior, se tiene:

$$C=A+B$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a & b\\ b & a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}w & -z\\ z & w\end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a+w & b-z\\ b+z & a+w\end{bmatrix}}$$

Igualando términos:

$$1=-a+w\quad\rightarrow(1)$$
$$1=b-z\quad\rightarrow(2)$$
$$1=b+z\quad\rightarrow(3)$$
$$1=a+w\quad\rightarrow(4)$$

- De (1): $\boxed{w = 1 + a}$; sustituyendo en (4): $1 = a + 1 + a \quad \rightarrow \quad 2a = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{a = 0}$
- Por tanto: $\boxed{w = 1}$
- De (2): $\boxed{b = 1 + z}$; sustituyendo en (3): $1 = 1 + z + z \quad \rightarrow \quad 2z = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{z = 0}$
- Por tanto: $\boxed{b = 1}$
- Con los valores encontrados se tiene que: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in W$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in W^{\perp}$
- Donde $\boxed{A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in W}$ $\leftarrow$ Matriz cuya distancia a la matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ es mínima.