SUBTEMA. COMBINACIÓN Y DEPENDENCIA LINEAL

Problema 1: Sea el conjunto $A=\{\overline{u},\overline{v},\overline{w}\}$, donde $\overline{u}=(2,1)$, $\overline{v}=(2,4)$ y $\overline{w}=(5,4)$. Representar al vector $\overline{w}$ como combinación lineal de los vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$.

SOLUCIÓN:

- Con la ecuacion de combinacion lineal:

$$\overline{w}=\alpha_1\overline{u}+\alpha_2\overline{v}$$

- Sustituyendo valores:

$$(5,4)=\alpha_1(2,1)+\alpha_2(2,4)$$
$$(5,4)=(2\alpha_1,\alpha_1)+(2\alpha_2,4\alpha_2)$$
$$(5,4)=(2\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_1+4\alpha_2)$$

- Igualando terminos:

$$2\alpha_1+2\alpha_2=5$$
$$\alpha_1+4\alpha_2=4$$

- Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior matricialmente:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 4 \\ 0 & -6 & -3 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\alpha_2=\frac{1}{2}}$$

$$\alpha_1+4\alpha_2=4\ \rightarrow\ \alpha_1=4-2\ \rightarrow\ \boxed{\alpha_1=2}$$

- Por tanto:

$$\boxed{\overline{w}=2\overline{u}+\frac{1}{2}\overline{v}}$$ Combinación lineal pedida

Problema 2: Determinar si el siguiente conjunto de vectores de R^3:

$$A=\{(-1,0,2),(0,-4,2),(2,0,-4)\}$$

es linealmente dependiente o independiente.

SOLUCIÓN:

- Con la ecuacion de dependencia lineal:

$$\alpha\bar{u}+\beta\bar{v}+\gamma\bar{w}=\bar{0}$$

- Sustituyendo valores:

$$\alpha(-1,0,2)+\beta(0,-4,2)+\gamma(2,0,-4)=\bar{0}$$
$$(-\alpha+2\gamma,-4\beta,2\alpha+2\beta-4\gamma)=(0,0,0)$$

- Igualando terminos:

$$\begin{aligned}-\alpha+2\gamma&=0\\ -4\beta&=0\\ 2\alpha+2\beta-4\gamma&=0\end{aligned}$$

- Resolviendo el sistema anterior matricialmente:

$$\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&-4&0\\2&2&-4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&2&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

- De donde se obtiene:

$$0\gamma=0\ \rightarrow\ \boxed{\gamma=a\in R}$$
$$\boxed{\beta=0}$$
$$\alpha-2\gamma=0\ \rightarrow\ \boxed{\alpha=2a}$$

- Los escalares α y γ son diferentes de cero, por tanto, el conjunto “A” es linealmente dependiente (es un conjunto generador).

Problema 3: Determinar si el siguiente conjunto de vectores de R^3:

$$B=\{(1,0,-2),(-4,2,0),(0,2,-4)\}$$

es linealmente dependiente o independiente.

SOLUCIÓN:

- Con la ecuacion de dependencia lineal:

$$\alpha_1\bar{b}_1+\alpha_2\bar{b}_2+\alpha_3\bar{b}_3=\bar{0}$$

- Sustituyendo valores:

$$\alpha_1(1,0,-2)+\alpha_2(-4,2,0)+\alpha_3(0,2,-4)=(0,0,0)$$
$$(\alpha_1-4\alpha_2,2\alpha_2+2\alpha_3,-2\alpha_1-4\alpha_3)=(0,0,0)$$

- Igualando terminos:

$$\alpha_1-4\alpha_2=0$$
$$2\alpha_2+2\alpha_3=0$$
$$-2\alpha_1-4\alpha_3=0$$

- Resolviendo el sistema anterior matricialmente:

$$\begin{pmatrix}1&-4&0\\0&2&2\\-2&0&-4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-4&0\\0&1&1\\0&-8&-4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-4&0\\0&1&1\\0&0&4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-4&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

- De donde se obtiene:

$$\boxed{\alpha_3=0}$$
$$\alpha_2+\alpha_3=0\quad\rightarrow\quad\boxed{\alpha_2=0}$$
$$\alpha_1-4\alpha_2=0\quad\rightarrow\quad\boxed{\alpha_1=0}$$

- Los escalares α, β y γ son iguales a cero, por tanto, el conjunto "B" es linealmente independiente (es una base).

Problema 4: Para el conjunto: $A = \left\{ (k-5)x^2 + x, 2x^2 - 2x + 3, 2x^2 + 3x - 3 \right\}$

Obtener el valor de $k \in R$, tal que "A" sea linealmente dependiente.

SOLUCIÓN:

- Con la ecuacion de dependencia lineal:

$$\alpha \bar{a}_1 + \beta \bar{a}_2 + \gamma \bar{a}_3 = \bar{0}$$

- Sustituyendo valores:

$$\alpha\left[(k-5)x^2 + x\right] + \beta\left(2x^2 - 2x + 3\right) + \gamma\left(2x^2 + 3x - 3\right) = \bar{0}$$

- Aplicando isomorfismo y realizando operaciones:

$$\alpha(k-5,1,0) + \beta(2,-2,3) + \gamma(2,3,-3) = (0,0,0)$$

$$(\alpha k - 5\alpha + 2\beta + 2\gamma, \alpha - 2\beta + 3\gamma, 3\beta - 3\gamma) = (0,0,0)$$

- Igualando terminos:

$$\begin{aligned} \alpha(k-5) + 2\beta + 2\gamma &= 0 \\ \alpha - 2\beta + 3\gamma &= 0 \\ 3\beta - 3\gamma &= 0 \end{aligned}$$

- Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ k-5 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} (-k+5) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2k-8 & -3k+17 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} (-2k+8) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -k+9 \end{pmatrix}$$

- Del ultimo renglon de la matriz escalonada anterior se observa que:

$$(-k+9)\gamma = 0$$

- Donde se debe cumplir que: A es linealmente dependiente

$$\gamma \neq 0 \quad y \quad -k+9 = 0$$

- Por tanto, para que A sea linealmente dependiente: $\boxed{k=9}$.

Problema 5: Sea $A = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ un conjunto de vectores linealmente independiente de un espacio vectorial "V". Determinar si el conjunto de vectores $B = \{\bar{u} - 2\bar{v} + \bar{w}, \bar{u} + \bar{v}, \bar{u} - \bar{v}\}$ es linealmente dependiente o independiente.

SOLUCIÓN:

- Ecuacion de dependencia lineal para la base "B":

$$\alpha \bar{b}_1 + \beta \bar{b}_2 + \gamma \bar{b}_3 = \bar{0}$$

- Sustituyendo valores:

$$\alpha\left(\bar{u} - 2\bar{v} + \bar{w}\right) + \beta\left(\bar{u} + \bar{v}\right) + \gamma\left(\bar{u} - \bar{v}\right) = \bar{0}$$

$$\alpha\bar{u} - 2\alpha\bar{v} + \alpha\bar{w} + \beta\bar{u} + \beta\bar{v} + \gamma\bar{u} - \gamma\bar{v} = \bar{0}$$

- Factorizando:

$$(\alpha + \beta + \gamma)\bar{u} + (-2\alpha + \beta - \gamma)\bar{v} + (\alpha)\bar{w} = \bar{0} \leftarrow \textit{se obtiene la ecuacion de dependencia lineal para A}$$

- "A" es linealmente independiente, por tanto:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ -2\alpha + \beta - \gamma &= 0 \\ \alpha &= 0 \end{aligned}$$

- Resolviendo matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- De la matriz escalonada anterior, se obtiene que:

$$\boxed{\gamma = 0}$$

$$\beta + \gamma = 0 \quad \to \quad \boxed{\beta = 0}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \to \quad \boxed{\alpha = 0}$$

- Los escalares α, β y γ son iguales a cero, por tanto, el conjunto "B" es linealmente independiente (es una base).