SUBTEMA: DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ

Problema 1: En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^2$ está definido el producto interno:

$$\left(\bar{u}\middle|\bar{v}\right) = u_1v_1 + 2u_2v_2 \qquad \forall\ \bar{u} = (u_1, u_2),\ \bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$$

Determinar mediante la desigualdad de Cauchy-Schwarz, el valor de $k \in \mathbb{R}$ para el cual el conjunto $A = \{\bar{u}, \bar{v}\}$, donde $\bar{u} = (k+5, k-1)$ y $\bar{v} = (-2,1)$, es linealmente dependiente.

SOLUCIÓN:

* La desigualdad de Cauchy-Schwarz para $\bar{u}$ y $\bar{v}$ linealmente dependientes queda:

$$\boxed{\left|\left(\bar{u}\middle|\bar{v}\right)\right|^2 = \left(\bar{u}\middle|\bar{u}\right)\cdot\left(\bar{v}\middle|\bar{v}\right)} \quad ó \quad \boxed{\left|\left(\bar{u}\middle|\bar{v}\right)\right| = \|\bar{u}\|\cdot\|\bar{v}\|}$$

* Calculando los productos internos:

$$\left(\bar{u}\middle|\bar{v}\right) = \left[(k+5, k-1)\middle|(-2,1)\right] = (k+5)(-2) + 2(k-1)(1) = -2k - 10 + 2k - 2$$

$$\boxed{\left(\bar{u}\middle|\bar{v}\right) = -12}$$

$$\left(\bar{u}\middle|\bar{u}\right) = \left[(k+5, k-1)\middle|(k+5, k-1)\right] = (k+5)(k+5) + 2(k-1)(k-1)$$

$$= k^2 + 10k + 25 + 2k^2 - 4k + 2$$

$$\boxed{\left(\bar{u}\middle|\bar{u}\right) = 3k^2 + 6k + 27}$$

$$\left(\bar{v}\middle|\bar{v}\right) = \left[(-2,1)\middle|(-2,1)\right] = (-2)(-2) + 2(1)(1) = 4 + 2$$

$$\boxed{\left(\bar{v}\middle|\bar{v}\right) = 6}$$

* Calculando el módulo:

$$\left|\left(\bar{u}\middle|\bar{v}\right)\right| = |-12| = 12$$

* Sustituyendo en la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\left|\left(\bar{u}\,|\,\bar{v}\right)\right|^2 = \left(\bar{u}\,|\,\bar{u}\right)\cdot\left(\bar{v}\,|\,\bar{v}\right)$$

$$(12)^2 = (3k^2 + 6k + 27)(6)$$

$$144 = 18k^2 + 36k + 162$$

$$18k^2 + 36k + 162 - 144 = 0$$

$$18k^2 + 36k + 18 = 0$$

$$18(k^2 + 2k + 1) = 0$$

$$\therefore \boxed{k^2 + 2k + 1 = 0}$$

* Se sabe que $k = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, por lo tanto:

$$k = \frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$\therefore$ Para $\boxed{k = -1}$ el conjunto A es linealmente independiente.

Problema 2: En el espacio vectorial real $P_{\le 2}$ de los polinomios de grado menor o igual a 2 con coeficientes reales, está definido el producto interno:

$$\left(p\,|\,q\right) = \sum_{i=-1}^{1} p(i)q(i)$$

Determinar, mediante la desigualdad de Cauchy-Schwarz, si el conjunto $A = \left\{x^2 + 1, x^2 - x\right\}$ es linealmente dependiente o independiente.

SOLUCIÓN:

* Definiendo la función:

$$\boxed{\left(p\,|\,q\right) = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)} \leftarrow \text{producto interno dado}$$

* Desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\left|\left(p\,|\,q\right)\right|^2 \le \left(p\,|\,p\right)\cdot\left(q\,|\,q\right)$$

* Si se consideran a los vectores del conjunto A como $A = \{p, q\}$ donde $p = x^2 + 1$ y $q = x^2 - x$; evaluando los vectores:

$x = -1;\quad p(-1) = (-1)^2 + 1 = 2;\quad q(-1) = (-1)^2 - (-1) = 2$

$x = 0;\quad p(0) = (0)^2 + 1 = 1;\quad q(0) = (0)^2 - 0 = 0$

$x = 1;\quad p(1) = (1)^2 + 1 = 2;\quad q(1) = (1)^2 - 1 = 0$

* Calculando los productos internos:

$$\left(p|q\right) = (2)(2) + (1)(0) + (2)(0) = \boxed{4}$$

$$\left(p|p\right) = (2)(2) + (1)(1) + (2)(2) = \boxed{9}$$

$$\left(q|q\right) = (2)(2) + 0 + 0 = \boxed{4}$$

$$\left|\left(p|q\right)\right| = |4| = \sqrt{4^2} = \boxed{4}$$

* Sustituyendo en la desigualdad:

$$(4)^2 \le (9)(4)$$

$$16 \le 36$$

$$\boxed{16 < 36}$$

Por tanto, el conjunto A es linealmente independiente.