SUBTEMA: ÁNGULO Y DISTANCIA

Problema 1: En el espacio vectorial M de las matrices de mxn con elementos en R, se tiene el siguiente producto interno:

$$\left(A \middle| B\right) = tr\left(A^T B\right) \qquad \forall\ A,\ B\ \in M$$

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Determinar $\alpha \in R$, tal que:

(a) La distancia entre A y B sea $\sqrt{3}$.

(b) El ángulo entre A y B sea $\frac{\pi}{3} = 60°$.

SOLUCIÓN:

(a) La distancia se obtiene con: $d\left(A,B\right) = \left\| A - B \right\| = \left\| B - A \right\|$

- De donde:

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

- Realizando el producto interno:

$$\left(A - B \middle| A - B\right) = tr\left[(A-B)^T (A-B)\right]$$

$$= tr\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ -\alpha & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\right] = tr\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \left(A - B \middle| A - B\right) = 0 + 1 + \alpha^2 + 1 = \boxed{\alpha^2 + 2}$$

- Por tanto: $\boxed{d\left(A,B\right) = \sqrt{\alpha^2 + 2}}$

- Tomando en cuenta la condición dada $d\left(A,B\right) = \sqrt{3}$:

$$d\left(A,B\right) = \sqrt{\alpha^2 + 2} = \sqrt{3}$$

• Despejando el valor de α buscado:

$$\alpha^2 + 2 = 3$$
$$\alpha^2 = 1$$
$$\therefore \boxed{\alpha = \pm 1} \leftarrow \text{ Valor para el cual } d(A,B) = \sqrt{3}$$

(b) El ángulo se obtiene con: $\cos\theta = \dfrac{(A|B)}{\|A\|\cdot\|B\|}$

• Calculando los productos internos necesarios:

$$(A|B) = tr\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\alpha & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = tr\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{1}$$

$$(A|A) = tr\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\alpha & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right] = tr\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & \alpha^2+1 \end{pmatrix} = \boxed{\alpha^2 + 2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\|A\| = \sqrt{\alpha^2+2}}$$

$$(B|B) = tr\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = tr\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\|B\| = \sqrt{2}}$$

• Sustituyendo valores en la expresión para determinar el ángulo:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+2}\cdot\sqrt{2}} = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

• Despejando α:

$$\sqrt{\alpha^2+2}\cdot\sqrt{2} = 2$$
$$\left(\sqrt{(\alpha^2+2)(2)} = 2\right)^2$$
$$2\alpha^2 + 4 = 4$$
$$2\alpha^2 = 0$$
$$\alpha^2 = 0$$
$$\therefore \boxed{\alpha = 0} \leftarrow \text{ Valor para el cual } \cos\theta = 60°$$

Problema 2: Calcular la distancia y el ángulo entre los vectores $\bar{z}=(1-i,-2i)$ y $\bar{w}=(2i,2-i)$ que pertenecen al espacio vectorial C^2, respecto al producto interno usual definido por:

$$\left(\bar{z}\middle|\bar{w}\right)=z_1\overline{w_1}+z_2\overline{w_2} \qquad \forall\ \bar{z}=(z_1,z_2),\quad \bar{w}=(w_1,w_2)\ \in C^2$$

donde $\overline{w_1}$ y $\overline{w_2}$ son los conjugados de w_1 y w_2, respectivamente.

SOLUCIÓN:

(a) La distancia se obtiene con: $d\left(\bar{z},\bar{w}\right)=\left\|\bar{z}-\bar{w}\right\|$

- De donde:

$$\bar{z}-\bar{w}=(1-i,-2i)-(2i,2-i)=\boxed{(1-3i,-2-i)}$$

- Calculando se producto interno:

$$\left(\bar{z}-\bar{w}\middle|\bar{z}-\bar{w}\right)=\left[(1-3i,-2-i)\middle|(1-3i,-2-i)\right]=(1-3i)(1+3i)+(-2-i)(-2+i)$$

$$=1+\cancel{3i}-\cancel{3i}-9i^2+4-\cancel{2i}+\cancel{2i}-i^2=1+9+4+1=\boxed{15}\quad\rightarrow\quad\boxed{\left\|\bar{z}-\bar{w}\right\|=\sqrt{15}}$$

- Por tanto:

$$\therefore\ \boxed{d\left(\bar{z},\bar{w}\right)=\sqrt{15}}\ \leftarrow \text{Distancia entre los vectores } \bar{z} \text{ y } \bar{w}$$

(b) El ángulo se calcula, en este caso, con la expresión: $\cos\theta\cong\dfrac{R\left(\bar{z}\middle|\bar{w}\right)}{\left\|\bar{z}\right\|\cdot\left\|\bar{w}\right\|}$

- Calculando los productos internos necesarios:

$$\left(\bar{z}\middle|\bar{w}\right)=\left[(1-i,-2i)\middle|(2i,2-i)\right]=(1-i)(-2i)+(-2i)(2+i)$$

$$=-2i+\cancel{2i^2}-4i-\cancel{2i^2}=\boxed{-6i}$$

$$\left(\bar{z}\middle|\bar{z}\right)=\left[\left(1-i,-2i\right)\middle|\left(1-i,-2i\right)\right]=(1-i)(1+i)+(-2i)(2i)$$

$$=1+\cancel{i}-\cancel{i}-i^2-4i^2=1+1+4=\boxed{6}\quad\rightarrow\quad\boxed{\left\|\bar{z}\right\|=\sqrt{6}}$$

$$\left(\bar{w}\middle|\bar{w}\right)=\left[\left(2i,2-i\right)\middle|\left(2i,2-i\right)\right]=(2i)(-2i)+(2-i)(2+i)$$

$$=-4i^2+4+\cancel{2i}-\cancel{2i}-i^2=4+4+1=\boxed{9}\quad\rightarrow\quad\boxed{\left\|\bar{w}\right\|=\sqrt{9}}$$

- Sustituyendo valores se llega a:

$$\cos\theta\cong\frac{0}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}\cong 0$$

$\therefore\ \boxed{\theta\cong 90°}\ \leftarrow$ Ángulo entre los vectores $\bar{z}$ y $\bar{w}$

Problema 3: Sean F el espacio vectorial de las funciones continuas en el intervalo [-1,1] y el producto interno definido por:

$$\left(f\middle|g\right)=\int_{-1}^{1}f(t)\cdot g(t)dt \qquad \forall\ f,g\ \in F$$

Para las funciones $\begin{cases} f(t)=1 \\ g(t)=t \\ h(t)=1+t \end{cases}$ determinar: **(a)** el ángulo entre f y h; y **(b)** la distancia entre g y h.

SOLUCIÓN:

(a) Ángulo entre f y h: $\cos\theta=\dfrac{\left(f\middle|h\right)}{\|f\|\cdot\|h\|}$

- Calculando los productos internos necesarios:

$$\left(f\,|\,h\right)=\int_{-1}^{1}(1)(1+t)dt=\int_{-1}^{1}(1+t)dt=\left[t+\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1}=1+\frac{1}{2}-\left(-1+\frac{1}{2}\right)=\boxed{2}$$

$$\left(f\,|\,f\right)=\int_{-1}^{1}(1)(1)dt=\int_{-1}^{1}dt=\left[t\right]_{-1}^{1}=1-\left(-1\right)=\boxed{2}\quad\rightarrow\quad\boxed{\|f\|=\sqrt{2}}$$

$$\left(h|h\right)=\int_{-1}^{1}(1+t)(1+t)dt=\int_{-1}^{1}(1+2t+t^2)dt=\left[t+t^2+\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1}=1+1+\frac{1}{3}-\left(-1+1-\frac{1}{3}\right)$$

$$=2+\frac{2}{3}=\boxed{\frac{8}{3}}\quad\rightarrow\quad\boxed{\|h\|=\sqrt{\frac{8}{3}}}$$

- Sustituyendo valores en la expresión del ángulo:

$$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{8}{3}}}=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{(2)(2)}{3}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Por tanto:

$$\therefore\ \boxed{\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}}\quad\leftarrow\text{ Ángulo entre } f \text{ y } h$$

(b) Distancia entre g y h: $d(g,h)=\|g-h\|$

- Realizando el producto interno:

$$g-h=t-(1+t)=\boxed{-1}$$

$$\left(g-h|g-h\right)=\int_{-1}^{1}(-1)(-1)dt=\int_{-1}^{1}dt=\left[t\right]_{-1}^{1}=1-\left(-1\right)=\boxed{2}$$

- Finalmente:

$$\therefore\ \boxed{d(g,h)=\|g-h\|=\sqrt{2}}\quad\leftarrow\text{ Distancia entre } g \text{ y } h$$