EL DESARROLLO DEL ÁLGEBRA LINEAL

En el siglo XIX se rompieron los cánones clásicos del álgebra, con criterio cada vez más abstracto, de los conceptos fundamentales de la aritmética y del álgebra ordinarias , lo que dio por resultado la creación de nuevos entes que pusieron de manifiesto el carácter básico de la llamada “ley de composición”. La historia de la matemática no hace sino comprobar tal carácter.

En el siglo XVIII el auge del cálculo infinitesimal y los sucesivos fracasos de resolver la ecuación de quinto grado por radicales detuvieron el progreso del álgebra, pero en el siglo XIX, y en especial en la segunda mitad, el álgebra se dirige por distintos caminos hacia lo que se considera hoy su problema esencial: el estudio de las estructuras algebraicas por sí mismas.

Mientras adquieren gran desarrollo el estudio de las formas y de los invariantes, y la teoría de los grupos se extiende a la teoría de cuerpos y anillos, la creación de sucesivas generalidades y extensiones del concepto de número da nacimiento a la noción abstracta de ley de composición, cuya aplicación a los nuevos entes amplía en grado considerable el campo del álgebra.

El primero de estos entes es el vector, que si bien era utilizado ya en la composición de fuerzas y de velocidades por los tratadistas de mecánica desde fines del siglo XVII, no tuvo repercusión entonces entre los matemáticos.

Mientras que por un lado los vectores, y sus sucesores los tensores, con el auxilio de los recursos del análisis matemático, encuentran importantes aplicaciones en diversos campos de la física; por otro lado, los vectores contribuyeron a la creación de las nuevas álgebras, por ejemplo, el álgebra lineal.

En este sentido cabe señalar las obras de William Rowan Hamilton (1805-1865) y de Hermann Günther Grassmann (1809-1877).

El álgebra alcanzó por primera vez la libertad en las décadas 1830-40 y 1840-50, con las teorías matemáticas de Hamilton y de Grassmann. Estos dos liberadores del álgebra se encuentran entre los mayores profetas matemáticos del siglo XIX.

Hamilton fue un sabio múltiple que sobresalió en astronomía, física y matemática. Se ocupó de los vectores (el nombre es invención suya) y creó un sistema de números complejos que llamó *Quaternions* (cuaternios) que satisface todas las propiedades de las operaciones de la aritmética ordinaria, con excepción de la propiedad conmutativa de la multiplicación. Los cuaternios aparecen en 1843, aunque el tratado completo sobre el tema: Lectures on Quaternions, de Hamilton no se publicó hasta diez años después.

Hamilton a los trece conocía muy bien los clásicos y las lenguas orientales tanto como las europeas. A los veintisiete años Hamilton era famoso por su predicción matemática de la refracción cónica, deducida de su amplia teoría de los sistemas de rayos, en óptica; a los treinta años había completado prácticamente su obra fundamental de dinámica que representaba un avance sobre Lagrange comparable al de éste sobre Euler. En 1843, a los treinta y ocho años, sobrepasó las dificultades que le habían impedido extender el álgebra de los vectores coplanares a una teoría de vectores y de rotaciones en un espacio de tres dimensiones.

Sobre Hamilton se acumularon los honores; a Grassmann, menos afortunado, no se le concedieron.

Grassmann mantuvo a su mujer y a nueve hijos practicando la enseñanza elemental, profesión para la cual estaba muy mal dotado. Nunca se quejó de los tormentos que sufría en manos de los jóvenes salvajes a los que, tan mal pagado había de civilizar. Hombre de ciencia original, teólogo y lingüista, que a los 53 años, decepcionado por el escaso éxito de sus trabajos matemáticos, se dedicó al estudio del sánscrito. Su obra matemática importante es de 1844 y se le conoce con el título abreviado *Ausdehrungslehre* (Teoría de la extensión) aunque en su título completo se refiere a una nueva disciplina matemática expuesta y aclarada mediante aplicaciones. El trabajo de 1844 se refiere a la “parte lineal” de dicha teoría y en años posteriores publicó ampliaciones de la misma, pero la manera algo inusitada y en exceso filosófica para los matemáticos de la época hizo que esta obra pasara inadvertida. Sólo más tarde, y ya muerto el autor, se reconoció tanto la amplia generalidad como la total abstracción de esta teoría algebraica-geométrica en un espacio de n dimensiones con importantes aplicaciones y donde aparecen conceptos básicos del álgebra lineal como “producto interno” y “producto externo”.

En 1844 Grassmann estaba en posesión de una extensa teoría capaz de una casi interminable cantidad de desarrollos por especializaciones en diferentes direcciones. Tal como la elaboró su creador, se puede interpretar esta teoría de las “magnitudes ampliadas” como un análisis vectorial muy generalizado para un espacio de n dimensiones.

El interés en la obra de Grassmann es la amplia generalización que daba a los números complejos x_1+ix_2 como parejas de números (x_1, x_2), hasta llegar a los números hipercomplejos $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

El alcance de su teoría quizás no se apreció por completo hasta el siglo XX. La obra de Grassmann incluía como detalle implícito el álgebra del cálculo tensorial que sólo fue ampliamente conocida después de su aplicación (1915-169) a la relatividad general.

Se ha dicho a menudo que a un matemático no le conviene ser filósofo. Sea o no esto un teorema general, con seguridad fue cierto en el caso del desdichado Grassmann, que al dotar a su teoría con toda la generalización que podía soportar, la asfixió con abstracciones filosóficas. Esta fue una de las grandes tragedias de las matemáticas. Gauss examinó la Ausdehnungslhre, y la bendijo con su calificada aprobación. Seguía la misma dirección, dijo, que ya había tomado él mismo casi medio siglo antes. Pero era demasiado filosófica con su "peculiar terminología", incluso para Gauss, que era bastante aficionado a la filosofía.

Entretanto Gauss había puesto de manifiesto su descubrimiento independiente de los cuaternios de Hamilton. En un breve resumen analítico que nunca publicó, que se cree del año 1819, Gauss escribió las ecuaciones fundamentales de lo que llamó mutaciones en el espacio, que en esencia son los cuaternios.

Además de Hamilton y Grassmann, tres matemáticos que contribuyeron al progreso del álgebra lineal, en siglo XIX, son Arthur Cayley (1821-1895), James Joseph Sylvester (1814-1897) y Charles Hermite (1822-1901). Se debe a ellos la creación de la teoría de los invariantes y por tal razón se les conoce con el sobrenombre de la "trinidad invariantiva", como alguna vez dijo Hermite.

Es a Sylvester a quien se deben las matrices (a las que no dio precisamente ese nombre) y el importante concepto de "rango", pero fue Cayley quien desarrolló, en 1858, con el cálculo de las matrices (el nombre es de él) una nueva álgebra.

La invención de las matrices ilustró una vez más lo poderosa y sugestiva que puede ser una notación bien ideada, también es un ejemplo del hecho que algunos matemáticos admitieron con disgusto de que un artificio trivial de notación fue el germen de una vasta teoría con innumerables aplicaciones.

Cayley mismo relató en 1894 que fué lo que le condujo a las matrices: "Desde luego que no llegué al concepto de matriz a través de los cuaternios, fué directamente a partir del de los determinantes; o bien como un modo conveniente de expresar las ecuaciones

$$x' = ax+by$$

$$y' = cx+dy \text{ "}$$

Simbolizando esta transformación lineal con dos variables independientes por medio de la disposición en cuadro

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

de sus coeficientes o elementos, Cayley se vió conducido a su álgebra de matrices de n^2 elementos, por las propiedades de las transformaciones lineales homogéneas de *n* variables independientes.

Tras de este invento hay un importante trozo de historia. Cayley había demostrado, en 1858, que los cuaternios se pueden representar como matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

donde sus elementos son números complejos.

Un signo de la evolución hacia una concepción cada vez más abstracta de las construcciones algebraicas puede verse en una frase de Cayley, de fines de siglo, al aludir a las discusiones acerca del valor de los cuaternios en vista de sus aplicaciones prácticas: “el concepto de cuaternio es mucho más hermoso que cualquiera de sus aplicaciones”.

Después de 1870 puede señalarse un nuevo progreso hacia la estructura general de las álgebras con la obra de Benjamin Peirce (1809-1880) sobre las álgebras lineales asociativas. Se establecen allí los conceptos de elementos nilpotentes e idempotentes, cuyo estudio inició el autor en 1864, aunque no se publicó sino hasta después de su muerte en 1881.

El álgebra lineal, cuyo desarrollo se inicia en el siglo XIX, mantiene un rasgo común con las geometrías no euclidianas y el nuevo análisis: su contribución a eliminar de la matemática conceptos intuitivos y hábitos mentales aún arraigados hasta en mentalidades matemáticas; así Möbius paso al lado de los cuaternios sin verlos, al rechazar los complejos de cuatro unidades por no satisfacer la propiedad conmutativa de la multiplicación.

UNA APLICACIÓN IMPORTANTE DEL ÁLGEBRA LINEAL

En una clase que impartió en la Universidad de Góttingen en 1905, el matemático alemán David Hilbert (1862-1943) consideró que los operadores lineales actuaban sobre ciertos espacios vectoriales de dimensión infinita. De esta clase surgió la noción de una forma cuadrática en una infinidad de variables, y fue en este contexto que Hilbert utilizó por primera vez el término espectro para referirse a un conjunto completo de eigenvalores.

Los espacios en cuestión se conocen en la actualidad como espacios de Hilbert.

Hilbert hizo importantes contribuciones a muchas áreas de las matemáticas, entre ellas las ecuaciones integrales, la teoría de los números, la geometría y fundamentos de matemáticas.

En 1900, en el segundo Congreso Internacional de Matemáticas llevado a cabo en Paris, dio una conferencia titulada “Los problemas de las matemáticas”. En ella, desafió a los matemáticos a resolver 23 problemas de importancia fundamental durante el siglo que se avecinaba. Muchos de los problemas han sido resueltos, probándose que algunos eran verdaderos y otros falsos, mientras que algunos nunca pudieron resolverse. No obstante el discurso de Hilbert galvanizó a la comunidad matemática y con frecuencia se considera como el discurso de más influencia que jamás se haya dado acerca de las matemáticas y de la importancia del Álgebra Lineal.

TERMINOLOGÍA

Spectrum (espectro) es una palabra latina que significa “imagen”. Cuando los átomos vibran, emiten luz. Y cuando la luz pasa a través de un prisma se dispersa en un “espectro”; una banda iridiscente (que muestra los colores del arcoíris). Las frecuencias de vibración corresponden a los eigenvalores de un cierto operador y son visibles como líneas brillantes en el espectro de luz que es emitido desde un prisma. De este modo podemos ver literalmente los eigenvalores del átomo en su espectro, y por esta razón es apropiado que la palabra espectro haya llegado a aplicarse al conjunto de todos los eigenvalores de una matriz u operador.

LAS ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Una de las ideas centrales que aparecen recurrentemente al hablar de álgebra moderna es la de **estructura algebraica.** Es indudable que la investigación matemática llevada a cabo dentro de la tendencia conocida como estructura algebraica trajo consigo resultados de gran valor, particularmente en lo que respecta al álgebra. El significado de la corriente estructural es la consolidación de una nueva imagen del conocimiento matemático.

Con el álgebra moderna se da la posibilidad de formular conceptos algebraicos en términos puramente abstractos.

El álgebra moderna se inicia con Evariste Galois quien cambio radicalmente el carácter del álgebra. Antes de Galois, los esfuerzos de los algebristas estaban dirigidos principalmente hacia la solución de ecuaciones algebraicas; después de Galois los esfuerzos de los algebristas se dirigeron hacia las estructuras de grupos y campos.

A la obra de Galois se debe la ejecución del programa revolkucionario de científicos importantes como Leopold Kronecker, Richard Dedekind, Heinrich Martin Weber, entre otros, que consistió en fundamentar los modernos desarrollos abstractos de las teorías algebraicas.

Sólo en 1846 se conoció gran parte de los escritos de Galois por obra de Joseph Liouville (1809-1882), y completó la publicación de sus escritos Jules Tannery (1848-1910) a comienzos de este siglo (1908). En ellos asoma ya la idea de “cuerpo”, que luego desarrollaron Riemann y Richard Dedekind (1831-1916). Es en estos escritos donde aparecen por primera vez las propiedades más importantes de la teoría de grupos (nombre que él acuño) que convierten a Galois en su cabal fundador.

Las primeras conferencia formales que se dieron sobre la teoría de Galois fueron las de Richard Dedekind en los primeros años de la década 1850-1860. Por aquella misma época Leopold Kronecker empezó sus estudios sobre las ecuaciones abelianas. Parece que el concepto de campo se introdujo en las matemáticas a través de las obras de Dedekind y Kronecker. Ambos y especialmente Dedekind, admitieron la importancia de los grupos para el álgebra. El concepto de campo de números quedó firmemente establecido en las matemáticas con el famoso Eleventh Supplement de Dedekind, sin embargo en esta obra Dedekind se ocupó únicamente de los números y las raíces de ecuaciones algebraicas con coeficientes racionales. Los camp'os que definió fueron por tanto los de los números reales y complejos.

Si bien es cierto Weber había sido el primero en definir los campos en forma abstracta, fue Steinitz el primero en investigar estructuralmente dicho concepto.

Steinitz abre su artículo con una declaración metodológica: su objetivo es investigar los campos abstractos definidos por Weber en 1893, pero su investigación diferirá de la de su predecesor en un sentido importante. En el trabajo de Steinitz se presenta una visión general de todos los tipos posibles de campos y se detallan los pasos a seguir a fin de describir todos los campos y entender la esencia de sus interrelaciones.

Primero es necesario determinar los campos más simples, luego deben estudiarse los métodos por medio de los cuales pueden obtenerse nuevos campos, partiendo de campos dados y a través de extensiones, detallando cuales son las propiedades del campo original que se transmiten a la extensión.

El trabajo de Steinitz repercutió en diversas áreas de la matemática. Tal vez el ejemplo más importante de esto es el trabajo de Abraham Fraenkel, en el cual se estudió por primera vez el concepto abstracto de anillo, mencionando explícitamente a Steinitz como fuente de inspiración. A su vez los trabajos de Fraenkel abrieron el camino para los trabajos importantes de Emmy Noether, Emil Artin y Wolfgang Krull sobre las teorías algebraicas abstractas.

La abstracción de dichas teorías abstractas es el resultado de un proceso característico de la matemática de hoy y que se manifestó contemporáneamente en otros sectores, proceso que elimina toda referencia a entes concretos, que prescinde por completo de la "naturaleza" de lo que en él interviene, para no dejar sino el "esqueleto formal" de entes y relaciones abstractas que definen la estructura algebraica.