

Aproximación numérica y errores

M.I. JAIME ALFONSO REYES CORTÉS

INTRODUCCIÓN

- **Análisis numérico:** Rama de las Matemáticas que, mediante el uso de algoritmos iterativos (métodos numéricos), obtiene soluciones numéricas a problemas en los cuales la matemática simbólica (o analítica) resulta poco eficiente y en consecuencia no puede ofrecer una solución.
- **Métodos numéricos:** Técnicas mediante las cuáles es posible formular problemas matemáticos, de tal forma que puedan resolverse de forma iterativa utilizando operaciones matemáticas.

Aproximación numérica y error.

- **Aproximación numérica x^* :** es una cifra que representa a un número cuyo valor exacto es x .

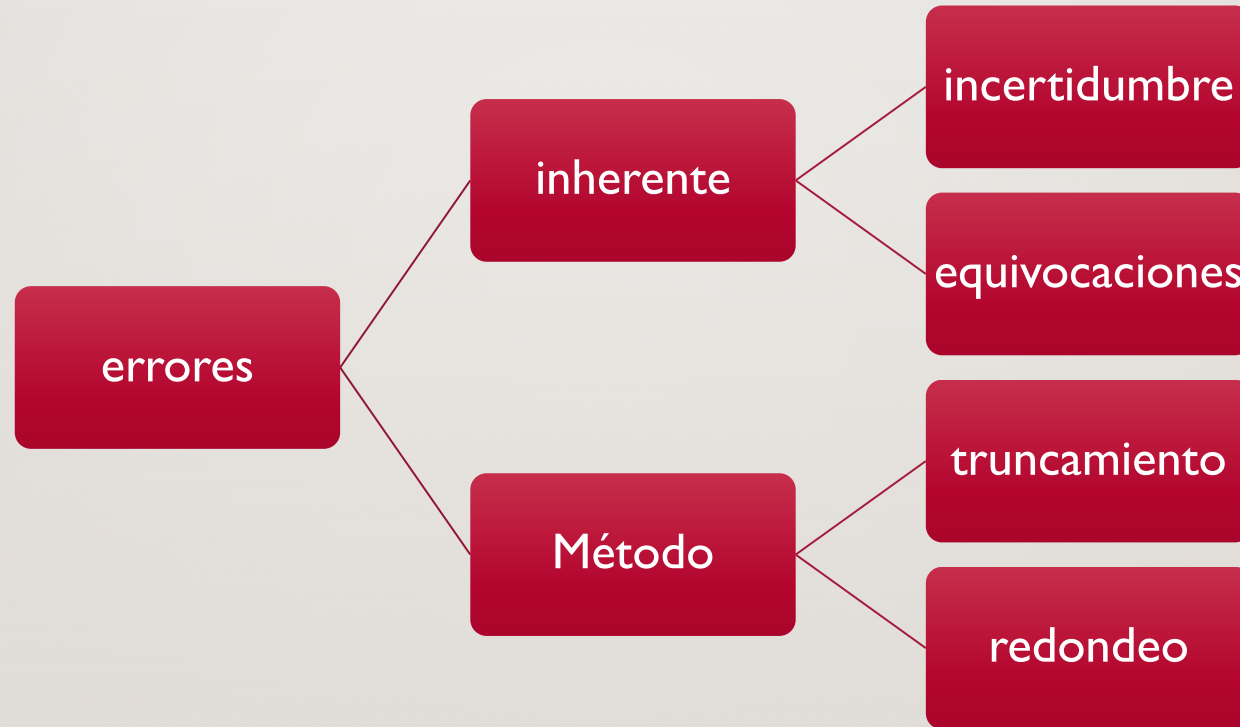
$$x^* = x + e_x$$

- **Error de aproximación:** Diferencia cuantitativa entre los resultados obtenidos experimentalmente y los emanados propiamente del modelo matemático.

$$e_x = x - x^*$$

- El análisis de error es importante cuando se quiere investigar y/o garantizar el desempeño de los métodos numéricos usados en problemas teóricos y prácticos.

Tipos de error



Cuantificación del error

- **Error absoluto**

$$e_{absoluto} = |valor\ exacto - valor\ actual|$$

- **Error relativo**

$$e_{relativo} = \left| \frac{valor\ exacto - valor\ actual}{valor\ exacto} \right|$$

- **Error relativo porcentual**

$$e_{relativo\%} = \left| \frac{valor\ exacto - valor\ actual}{valor\ exacto} \right| * 100\%$$

El proceso de redondeo

- Un número decimal se puede representar como:

$$d_n * 10^n + d_{n-1} * 10^{n-1} + d_{n-2} * 10^{n-2} + \dots + d_1 * 10^1 + d_0 * 10^0 + d_{-1} * 10^{-1} + d_{-2} * 10^{-2} + \dots + d_{-(m-1)} * 10^{-(m-1)} + d_{-m} * 10^{-m}$$

- donde i es la i -ésima posición que ocupa el dígito en el número decimal, d_i corresponde al i -ésimo dígito y los dígitos d_n y d_{-m} se conocen como dígito más significativo y dígito menos significativo, respectivamente.
- **Cifras significativas:** son aquellas cifras de un número que pueden utilizarse en forma confiable. Se trata del número de dígitos que se ofrecen con certeza en una medición, más uno estimado (incertidumbre), que corresponde al último dígito de dicho número.
- **Mantisa:** Número de dígitos que siguen después del punto decimal en una cantidad determinada.

El proceso de redondeo

- **Normalización de cantidades:** Se debe representar el número en notación exponencial de tal manera que su parte entera siempre sea cero y su mantisa siempre empiece con un número diferente de cero, La potencia del exponente de la base se adapta a dicha cantidad.
- Posteriormente, es redondeado o truncado.
- **Redondeo simétrico**
 - El esquema utilizado para redondear el dígito menos significativo (dms) de una determinada cantidad es:
 - $dms > 5 \Rightarrow$ *se incrementa en una unidad la cifra anterior al dms*
 - $dms < 5 \Rightarrow$ *la cifra anterior al dms permanece sin cambios*
 - $dms = 5 \Rightarrow$ *deberá observarse la cifra anterior, si ésta es par no sufre modificación, en caso contrario deberá incrementarse en una unidad.*

Efectos debido al proceso de redondeo

- McCracken concluye que las magnitudes de los errores cometidos por el truncamiento son mayores a los cometidos por el uso del redondeo simétrico..
- La cantidad del error por redondeo simétrico es independiente de la cantidad en sí misma; depende del tamaño de la mantisa que se utilice para hacer cálculos.

- **Error absoluto máximo:**

$$e_{amax} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-t+1} [u]$$

- **Error relativo porcentual máximo (tolerancia):**

$$tolerancia = 0.5 \cdot 10^{2-n} \%$$

Propagación del error

- Cuando un error de redondeo se ha introducido, éste se suma a otros errores y se transmite a través del proceso ocasionando que exista un error también en los cálculos así como en el resultado.
- La aritmética utilizada por la máquina no respeta la aritmética ordinaria. Cada simple operación de punto flotante casi siempre genera un error que se puede propagar en las siguientes operaciones.
- Se pueden minimizar los errores de redondeo incrementando el número de cifras significativas en la computadora y así el error no será muy dañino, excepto en casos particulares.

Propagación del error

- Atender a las siguientes consideraciones:
 1. Cuando se van a sumar y/o restar cantidades, siempre se debe trabajar primero con aquellos números cuya magnitud es la menor.
 2. De ser posible, evitar la substracción de números aproximadamente iguales. Una expresión que contenga dicha substracción puede a menudo ser reescrita para evitarla. Las expresiones que involucran lo siguiente se recomienda reescribirlas:

$$a(b - c) = ab - ac$$
$$\frac{a - b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$$

3. Cuando no se aplica ninguna de las reglas anteriores, debe minimizarse el número de operaciones aritméticas.

Serie de Taylor

- Sea $f \in C^n[a, b]$, tal que f^{n+1} existe en el intervalo $[a, b]$ y $x_0 \in [a, b]$. Para cada $x_0 \in [a, b]$, existe un número $\xi(x)$ entre x_0 y x con:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

- donde

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k}{k!}$$

Polinomio de Taylor

Serie de Taylor

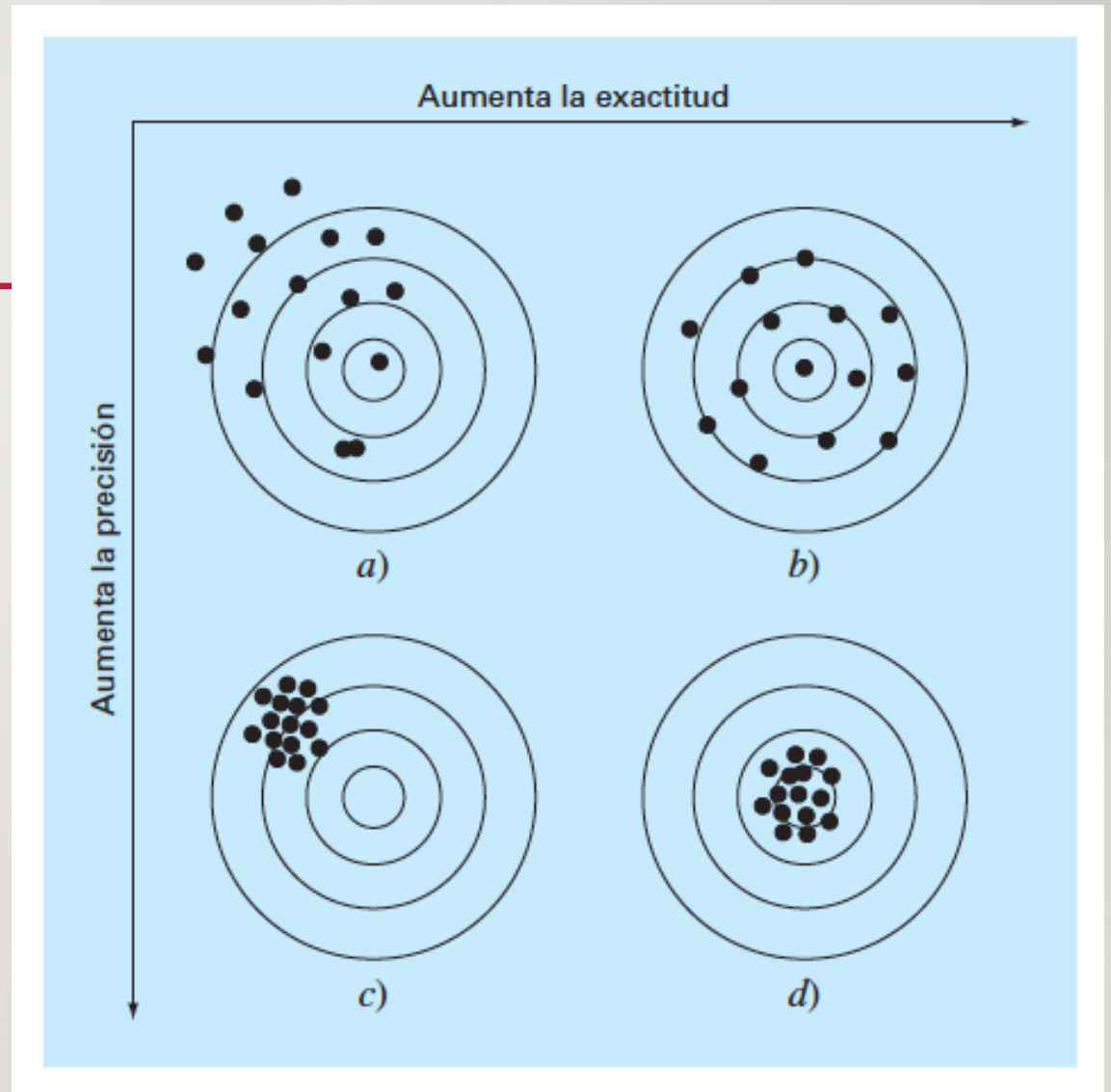
- y

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!}$$

**Término residuo o
error de truncamiento**
asociado con el polinomio
de Taylor

Exactitud y Precisión

- **Exactitud:** Capacidad de un proceso para acercarse a un valor real.
- **Precisión:** Capacidad de un proceso para obtener resultados similares.



Convergencia y Estabilidad

- Un método numérico es **convergente** cuando en su funcionamiento iterativo proporciona aproximaciones cada vez más cercanas al valor buscado.
- Un método numérico es **estable** cuando las variaciones producidas en los resultados debido a pequeños cambios en los datos iniciales de entrada también son pequeñas. Si ocurre que las variaciones de dichos resultados son muy grandes aunque los cambios en los datos iniciales de entrada sean pequeños, se dice que el método numérico es **inestable**.
- Cuando un algoritmo es convergente y estable, se dice que el algoritmo es robusto