UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

APUNTES DE CÁLCULO Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

SEMESTRE 2025-2

PROF. ING. ALICIA PINEDA RAMÍREZ

CÁLCULO Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

MÉTODO DE EVALUACIÓN

- La exención de la materia se otorgará a los alumnos que acrediten el curso con calificación aprobatoria mínima de siete (7).
- Se trabajarán con proyectos de aplicación de cada uno de capítulos que integran el programa de estudios de la asignatura, el promedio de las calificaciones será ponderada con un 25% de la calificación final.
- Todos los jueves se tendrá una evaluación, con tiempo máximo de aplicación de 30 minutos, donde se pretende valorar la comprensión de los temas vistos en las clases preliminares de la semana, el promedio de estas evaluaciones será ponderada con un 10% de la calificación final.
- Los exámenes parciales tendrán una ponderación en el promedio final de 65%. Para quedar exentos de los finales solo se pueden reprobar un solo examen.

- Para quienes no puedan quedar exentos de forma directa durante el semestre, se tendrá la posibilidad de presentar los exámenes finales, siempre y cuando su asistencia a clases sea del 70%. El primer final será promediado con los exámenes parciales y con el promedio de las pruebas didácticas. Para este promedio se considerarán los siguientes porcentajes.

Examen final	50%
Promedio de exámenes parciales	40%
Promedio de evaluaciones semanales	10%

ESCALA DE CALIFICACIONES

0.0 – 5.9 --- **5**

6.0 – 6.4 --- **6**

6.5

6.6 – 7.4 --- **7**

7.5

7.6 – 8.4 --- **8**

8.5

8.6 – 9.4 --- **9**

9.5

9.6 – 10 --- **10**

FECHAS DE EXAMENES PARCIALES Y FINALES:

1er. Parcial: 22 marzo 2025, 8:00 h, capítulos 1, 2 y 3

2do. Parcial: 10 al 22 de abril 2025, en clase, capítulos 4 y 5

3er. Parcial: 22 de mayo 2025, en clase, capítulos 6 y 7

FINALES

1er. Final: 26 de mayo, 10:30 h

2do. Final: 2 de junio, 10:30 h

BIBLIOGRAFÍA

1. Andrade Arnulfo, Crail Sergio.
   Cuaderno de ejercicio de Cálculo Diferencial, 2da. Edición, México

2. Castañeda de I. P. Erick
   Geometría analítica en el espacio, 1ª. Edición, México

3. Larson R. Bruce E.
   Cálculo I de una variable, 9ª. Edición, México

4. Stewart James
   Cálculo de una variable, 6ª. Edición, México

5. Lehmann, Charles
   Geometría Analítica, 1ª. Edición, México

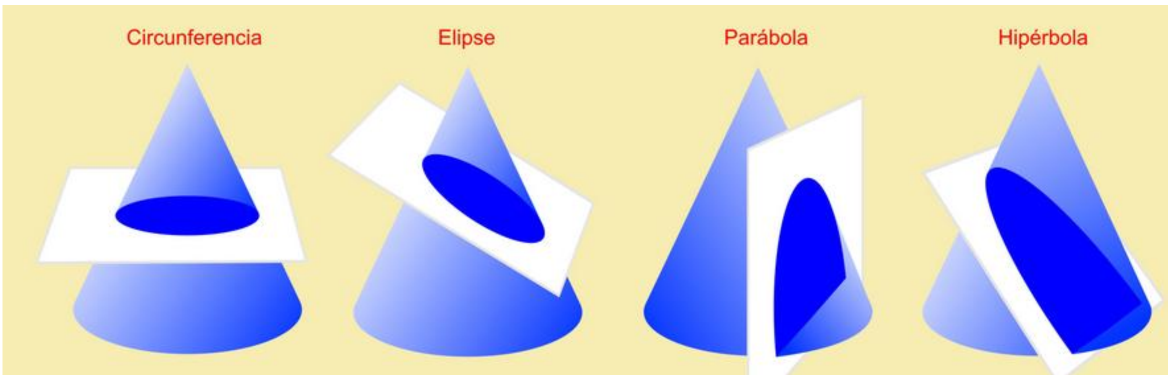
CAPÍTULOS:

I. Secciones cónicas
II. Funciones
III. Límites y continuidad
IV. La derivada y aplicaciones
V. Variación de funciones
VI. Álgebra vectorial
VII. Recta y plano

1. SECCIONES CÓNICAS

1.1 Definición de Cónica.

Las cónicas son curvas planas obtenidas mediante la intersección de un cono con un plano. El ángulo que forman el eje y la generatriz del cono determina las distintas clases de cónicas.



Clasificación de las cónicas.

- Circunferencia
- Elipse
- Parábola
- Hipérbola
- Degeneración en puntos y rectas

1.2 Ecuación General de las cónicas

Su ecuación general es de segundo grado:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Toda curva cónica tiene como representación una ecuación de segundo grado, cuando Z=0, pero no toda ecuación de segundo grado representa una curva cónica, podría representar una degeneración de una cónica o podría no representar un lugar geométrico.

1.3 Identificación de los tipos de cónicas a partir de los coeficientes de la ecuación general.

En la ecuación si los términos:

$F \neq 0$, la curva no contiene el origen

$F = 0$, la curva contiene el origen

$B = 0$, los ejes de la curva son paralelos o coinciden con los ejes coordenados

$B \neq 0$, los ejes de la curva son oblicuos con respecto a los ejes coordenados

$D = E = 0$, significa que la curva no está trasladada con respecto al origen

D *o* $E \neq 0$ o ambos diferentes de cero, significa que la curva está trasladada

$A, B, C = 0$, se tiene una recta.

De acuerdo a la característica de los coeficientes en la ecuación de segundo grado se puede especificar el tipo de cónica a estudiar. Considerando $B = 0$

$A = C$ Tipo circunferencia

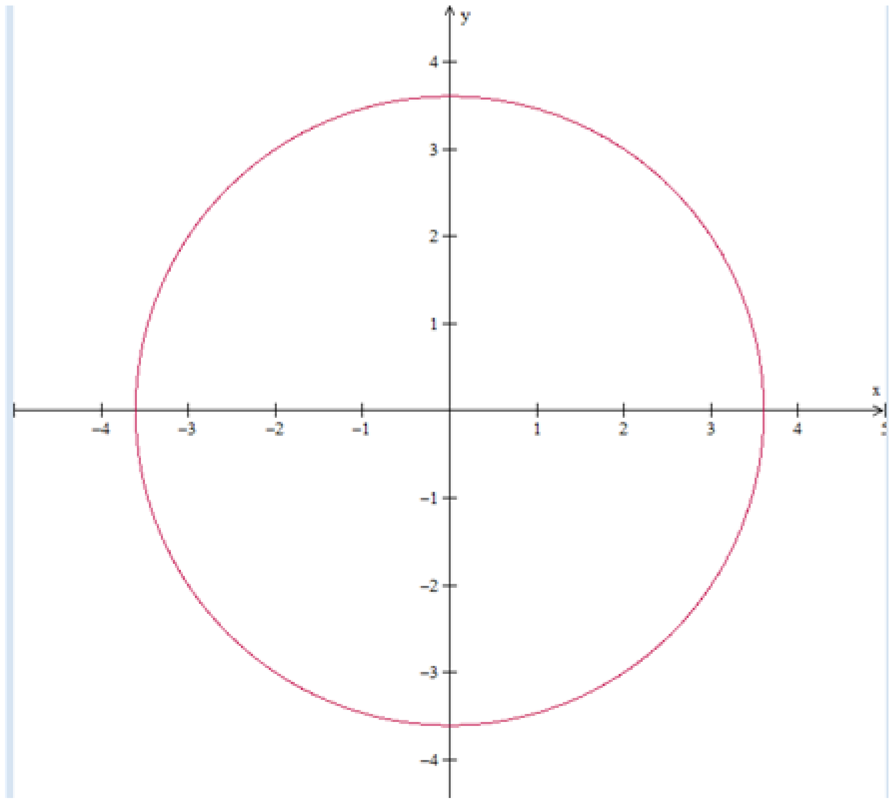
$A \neq C$ y del mismo signo, es tipo elipse

$A \neq C$ con signos contrarios, es tipo hipérbola.

1.4 Ecuación de las cónicas en forma ordinaria.

Considerando B=0, entonces la ecuación general de la cónica es: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Circunferencia: Lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto llamado centro.



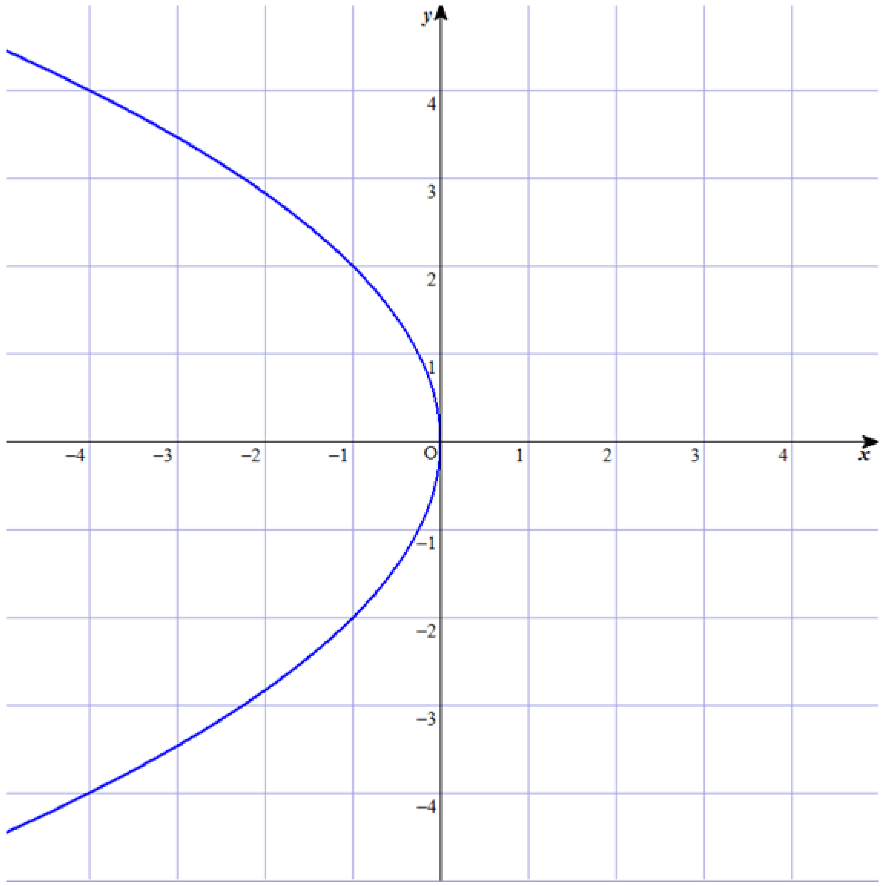
Ecuación canónica: $x^2 + y^2 = r^2$

Ecuación ordinaria: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

Elementos de la circunferencia:

- Centro
- Radio
- Diámetro
- Perímetro

Parábola: Lugar geométrico de todos los puntos cuya distancia a un punto fijo llamado foco es siempre igual a la distancia de ese punto a una recta fija llamada directriz.



Ecuación canónica:

$$y^2 = 4px \quad con\ eje\ focal\ en\ eje\ X\ y\ abre\ hacia\ la\ derecha$$
$$y^2 = -4px \quad con\ eje\ focal\ en\ el\ eje\ X\ y\ abre\ hacia\ la\ izquierda$$
$$x^2 = 4py \quad con\ eje\ focal\ en\ el\ eje\ Y\ y\ abre\ hacia\ arriba$$
$$x^2 = -4py \quad con\ eje\ focal\ en\ el\ eje\ Y\ y\ abre\ hacia\ abajo$$

Ecuación ordinaria, donde el vértice se encuentra en (h,k) y el eje focal con las mismas características que la ecuación canónica.

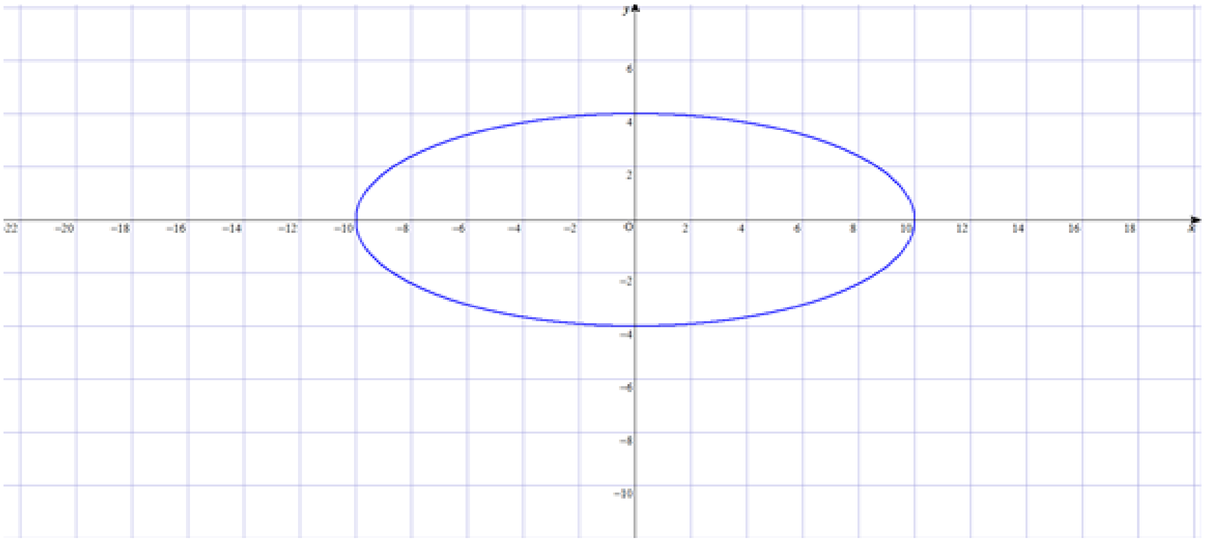
$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$
$$(y-k)^2 = -4p(x-h)$$
$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$
$$(x-h)^2 = -4p(y-h)$$

Elementos de la parábola:

- Vértice
- Foco

- Directriz
- Lado recto

Elipse: Lugar geométrico de todos los puntos en los que la suma de las distancias a dos puntos fijos llamados focos, permanece constantes.



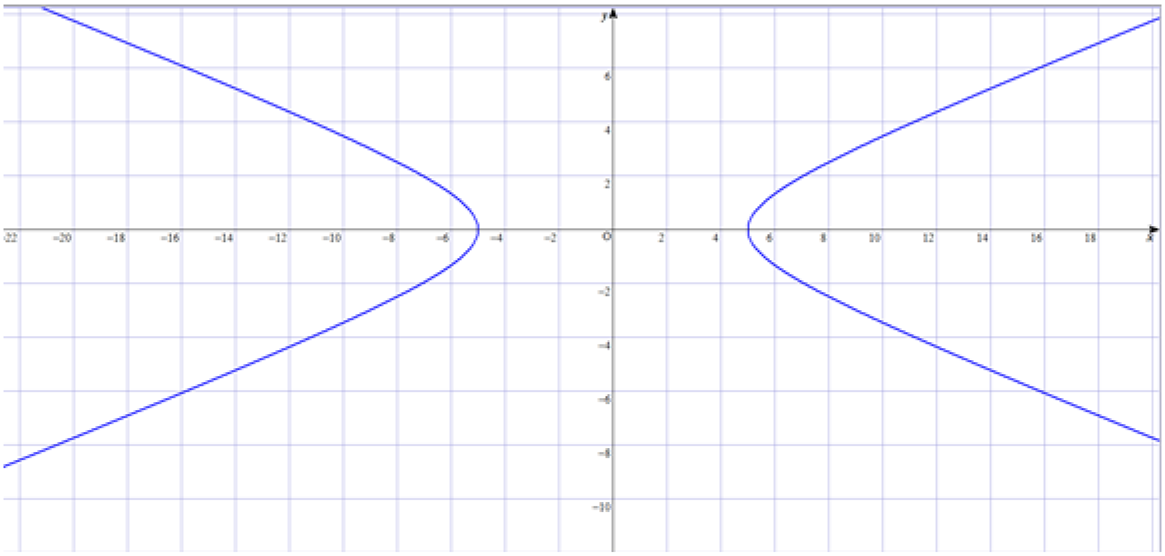
Ecuación canónica: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Ecuación ordinaria: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

Elementos de la elipse:

- Centro
- Vértices
- Focos
- Semieje mayor
- Semieje menor
- Distancia focal: $c^2=a^2-b^2$

Hipérbola: Lugar geométrico de todos los puntos tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias a dos puntos fijos llamados focos, permanece constante.



Ecuación canónica:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Ecuación ordinaria:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$
$$-\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Elementos de la hipérbola:

- Centro
- Vértices
- Focos
- Semieje transverso
- Semieje conjugado
- Distancia focal: $c^2=a^2+b^2$

Hipérbola equilátera: $x^2-y^2=a^2$

1.5 Identificación de la cónica por medio del indicador $I = B^2 - 4AC$ y rotación de ejes.

En la ecuación general de las cónicas: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Si $B \neq 0$ significa que la curva cónica en estudio tiene sus ejes girados con respecto a los ejes de referencia, además solo podrá representar la ecuación de una parábola, una elipse o una hipérbola, también podrá ser alguna de las degeneraciones de estas curvas.

Indicador o Discriminante: Se puede identificar la cónica que representa la ecuación a partir de su forma general, auxiliándose del siguiente discriminante:

$$I = B^2 - 4AC$$

Al valuar el discriminante si $I > 0$ se tiene una cónica tipo hipérbola.

$si\ I = 0$ es tipo parábola

$si\ I < 0$ es tipo elipse

Pero la forma más exacta de identificarla es reducir la ecuación general a su ecuación ordinaria, para ello es necesario hacer una transformación de coordenadas aplicando un cambio de variable:

$$x = x'cos\theta - y'sen\theta$$
$$y = x'sen\theta + y'cos\theta$$

El objetivo será eliminar el termino xy al girar los ejes de referencia y hacerlos paralelos a los de la cónica. Y el ángulo de giro estará dado por $tan2\theta = \frac{B}{A-C}$

Para la traslación de ejes se utiliza un nuevo cambio de variable donde:

$$x = x' - h$$
$$y = y' - k$$

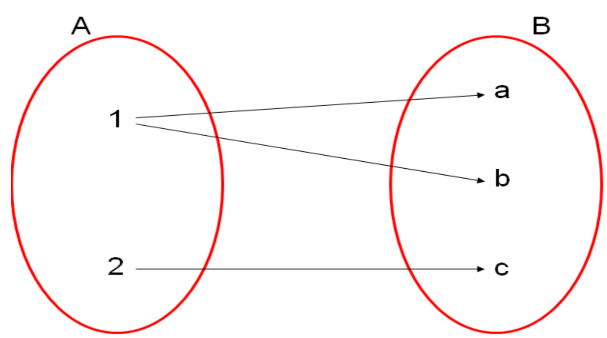
2. FUNCIONES

2.1 Definición de función real de variable real y su representación gráfica. Definición de dominio, de codominio y de recorrido. Notación funcional. Funciones: constante, identidad, valor absoluto.

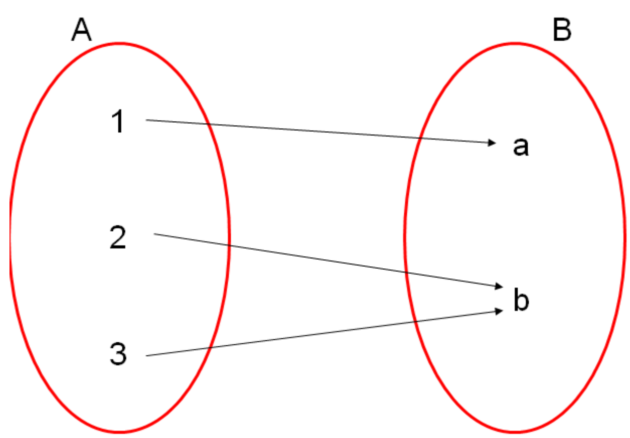
La definición de función se puede especificar por medio de la teoría de conjuntos, donde se tienen un par de conjuntos que se relacionan entre sí.

Una relación es una regla que asocia elementos de un conjunto A con elementos de un conjunto B. Los elementos del conjunto A constituyen el dominio y los elementos del conjunto B constituyen el codominio (contradominio) de la relación.

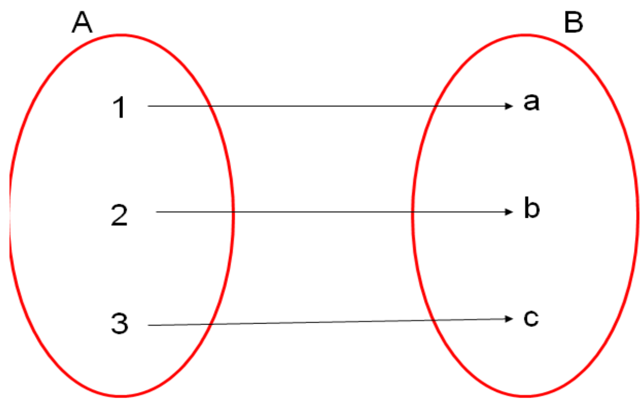
Se tiene una relación multiforme cuando a los elementos del conjunto A le corresponde uno o más elementos del conjunto B.



Una relación uniforme o unívoca es cuando a cada elemento de A se asocia un solo elemento de B.



Una relación biunívoca es cuando a los elementos de A le corresponde uno y solo un elemento de B y por el contrario.



Se tiene una función cuando se especifica una relación “uno a uno” (biunívoca) o una relación uniforme (unívoca).

Toda función es una relación, pero no toda relación es una función. Las relaciones multiformes NO son funciones.

FUNCION: Es una función uniforme, una terna formada por:

a) A o dominio de la función
b) B o codominio de la función
c) Regla de correspondencia que tiene las siguientes propiedades:
    a. Todos los elementos del dominio de la función se les asocia un elemento del codominio.
    b. Ningún elemento del dominio puede tener más de un socio en el codominio. Cada elemento del dominio encuentra su imagen en el codominio.

Al conjunto de imágenes se le llama Recorrido o Rango de la función.

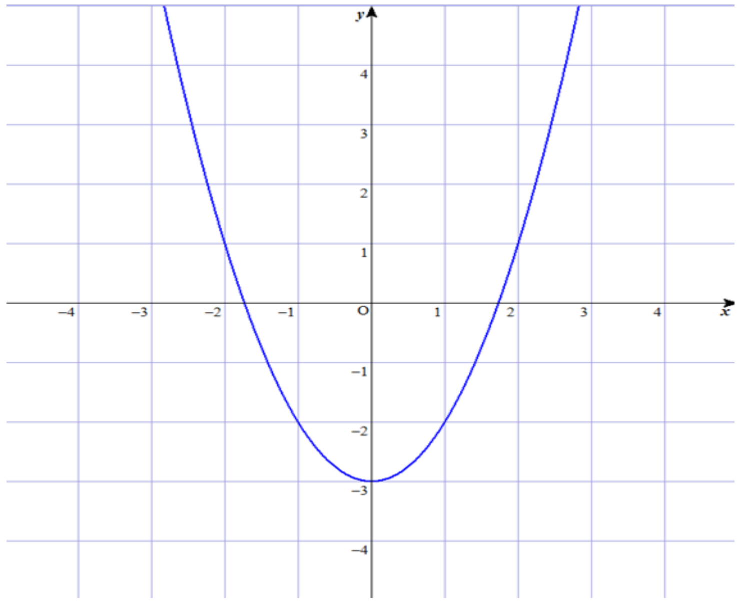
La función real de variable real: Cuando dos variables están relacionadas en tal forma que a cada valor de la primera le corresponde un valor y sólo uno de la segunda, se dice que la segunda es función de la primera. Los valores con los que se trabajará en el curso son elementos que pertenecen al conjunto de los números reales, es decir la unión de números racionales e irracionales.

Representación gráfica:

Una función se gráfica en el plano, así sus coordenadas son las parejas (x,y). La gráfica de una función es un lugar geométrico de todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación:

$$y = f(x)$$

$$y = x^2 - 3$$



Intervalos: Se manejan intervalos finitos o infinitos, abiertos o cerrados.

Intervalos finitos:

Abierto: $(a,b)=\{x|x\in R, a\prec x\prec b\}$

Cerrado: $[a,b]=\{x|x\in R, a\leq x\leq b\}$

Semiabierto por la izquierda: $(a,b]=\{x|x\in R, a\prec x\leq b\}$

Semiabierto por la derecha: $[a,b)=\{x|x\in R; a\leq x\prec b\}$

Intervalos infinitos:

Abierto: $(a,\infty)=\{x|x\succ a\}$

Cerrado por la izquierda: $[a,\infty)=\{x|x\geq a\}$

Abierto: $(-\infty,a)=\{x|x\prec a\}$

Cerrado por la derecha: $(-\infty,a]=\{x|x\leq a\}$

Abierto: $(-\infty,\infty)=\{x|x\in R\}$

Notación: Se emplea la notación de las relaciones para representar funciones.

Una función puede expresarse por compresión: $f = \{(x,y) | x \in A;\ \ y = f(x)\}$

$$y = f(x);\ \ x \in D_f$$

$$f : D_f \to C_f$$

Dominio de una función: Es el conjunto de valores que toma la variable independiente (x)

$$f = \{(x,y) | x \in A;\ \ y = f(x)\};\ \ D_f = A$$

Codominio (Contradominio) de una función: Es el conjunto donde se encuentra los posibles valores que obtendrá la variable dependiente (y), normalmente son todos los reales.

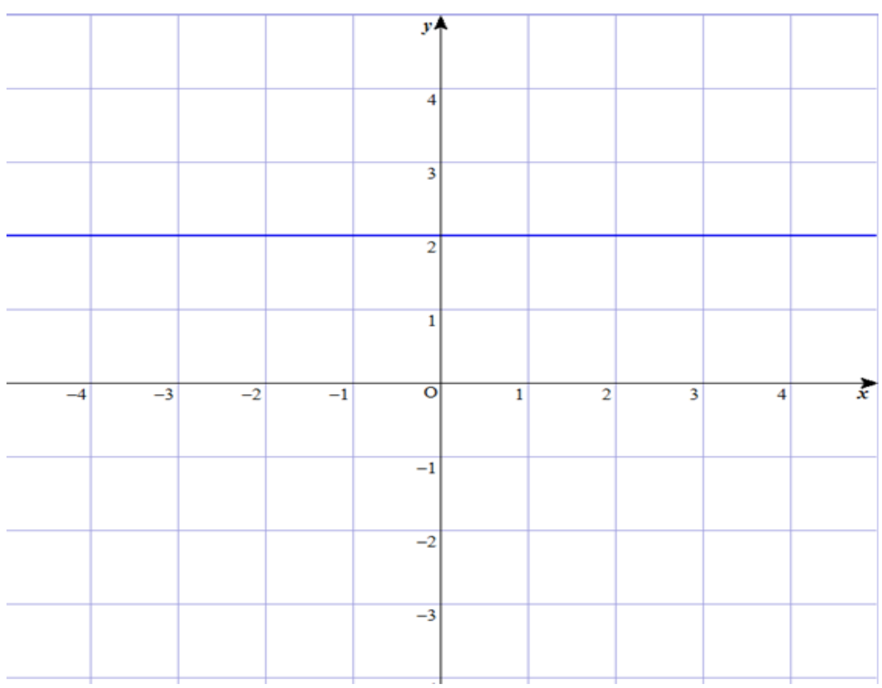
Rango o Recorrido de la función: Es el conjunto de valores que toma la variable dependiente.

$$R_f = \{y | y = f(x),\ \ x \in D_f\}$$

Función constante:

Los elementos del dominio se asocian con un único valor del recorrido.

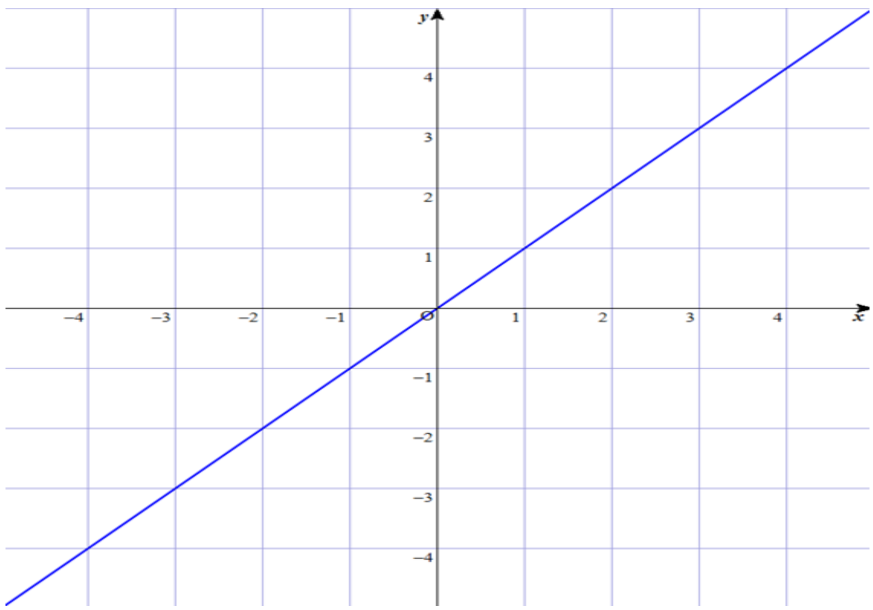
$y = k,\quad k$ = constante, el dominio de la función serán todos los reales, el recorrido es la constante.



Función identidad:

La función en donde a cada valor de la variable independiente le corresponde el mismo valor de la variable dependiente.

$f(x) = x$ o $y = x$; el dominio y el recorrido de la función son los reales.

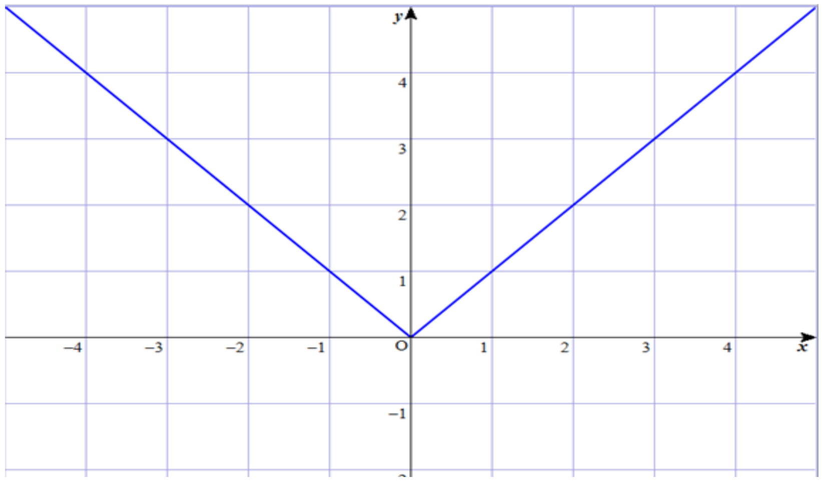


Función valor absoluto:

La función permite obtener el mismo valor de la variable independiente pero si es negativa la función la hace positiva.

Regla de correspondencia.

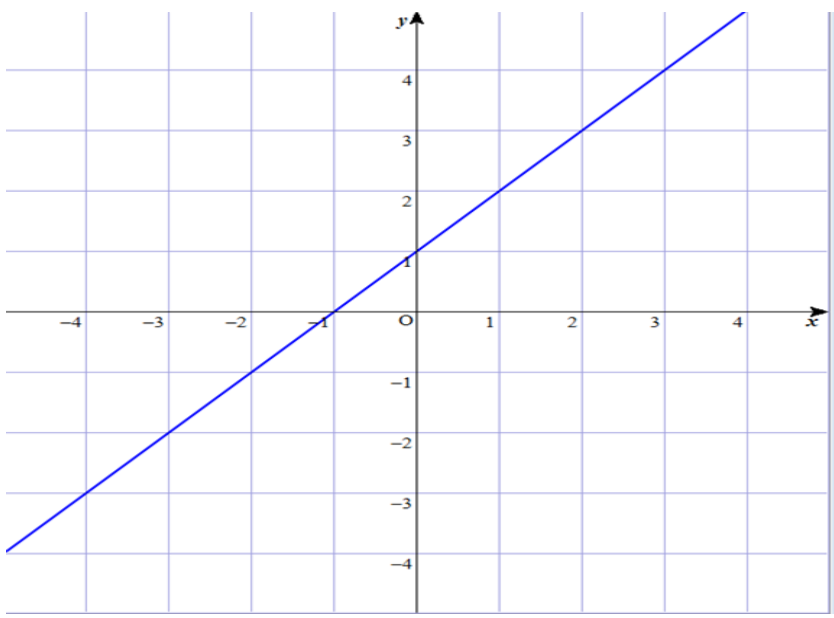
$$f(x) = |x|$$
$$f(x) = \begin{cases} -x & si\ x < 0 \\ x & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$$



El dominio de la función es el conjunto de los reales y el recorrido es el conjunto de los reales positivos.

2.2 Funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas.

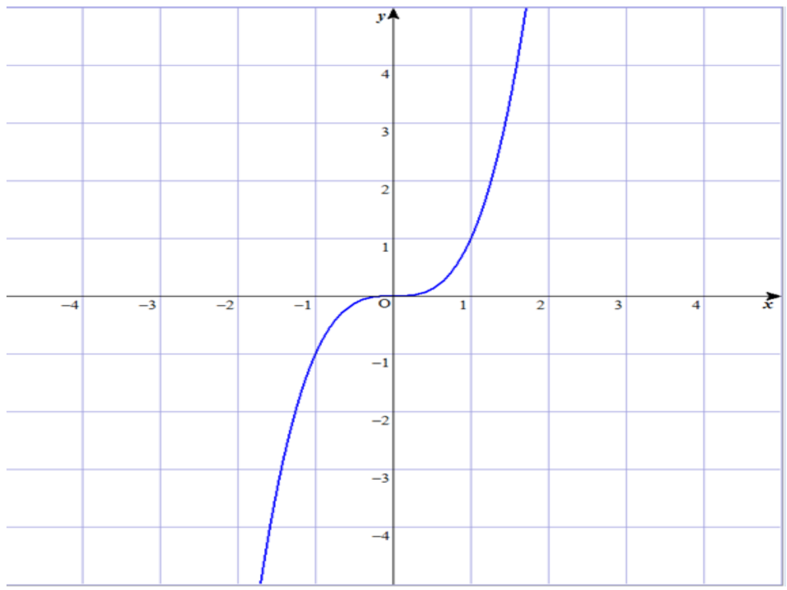
Función inyectiva o función uno a uno si para diferentes valores del dominio le corresponden distintos valores del codominio y recíprocamente. $y = x + 1$



Una función es inyectiva si toda recta paralela al eje X corta la gráfica de la función en un solo punto. Ya se sabe que es una función por lo cual ahora los cortes son horizontales y garantizar que se tiene una función inyectiva.

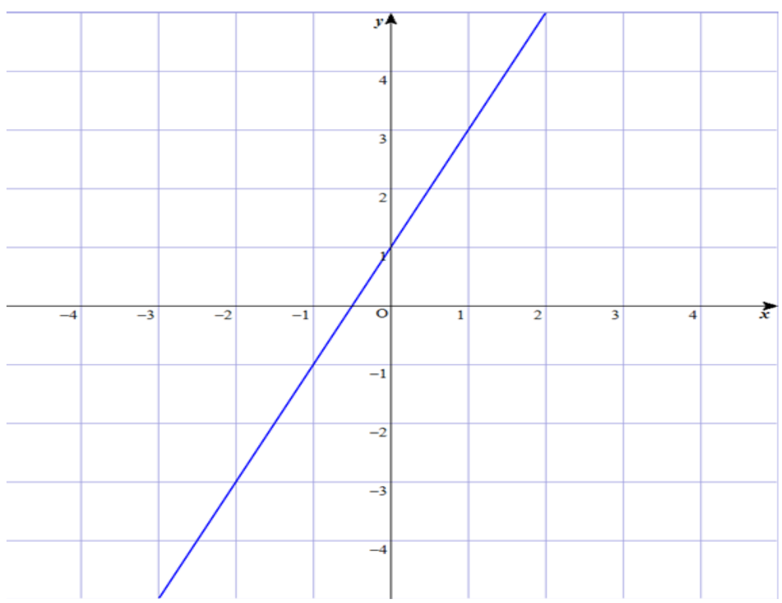
Una función que no es inyectiva, se puede volver inyectiva si se limita el dominio de la función.

Función Suprayectiva o "sobre" cuando todos los elementos del codominio son imagen de por lo menos un elemento del dominio. $y = x^3$



Se puede hacer una función suprayectiva al convertir el dominio igual al codominio.

Función biyectiva si la función cumple con ser al mismo tiempo inyectiva y suprayectiva y la regla de correspondencia es biunívoca.



Clasificación de funciones según su expresión: explicitas, implícitas, paramétricas y dadas por más de una regla de correspondencia.

Funciones explicitas: Una función es explícita cuando en la ecuación que actúa como regla de correspondencia, se tiene despejada la variable dependiente *"y"* en términos de la variable independiente *x*.

Ejemplos:

$$y = x^2 - 3$$
$$y = \sqrt{5 - x}$$

Funciones implícitas: Son aquellas cuya regla de correspondencia es una ecuación del tipo $f(x, y) = 0$. Una función de este tipo se caracteriza porque en la ecuación que actúa como regla de correspondencia, la variable dependiente "y" no se encuentra despejada.

Ejemplos:

$$x^2 - 3y + 1 = 0$$
$$xy = 1$$
$$y = \cos(x - y)$$
$$x^2 + y^2 = 4$$

En las funciones implícitas frecuentemente se requiere de una o más condiciones para que la ecuación actúe como regla de correspondencia de una función.

$$\frac{(x+1)^2}{4} + (y-1)^2 = 9; \quad y \geq 1$$
$$xy - 1 = 0; \;\; x \neq 0$$

No toda ecuación con dos variables puede ser regla de correspondencia de una función, existen ecuaciones que no se satisfacen para ningún par de valores reales, por ejemplo:

$$4x^2 + y^2 + 4 = 0$$

Funciones paramétricas: Una función paramétrica tiene la siguiente forma:

$$f = \left\{ (x, \mathrm{y}) \middle| x = f(t), y = g(t), t \in D_f \cap F_g \neq 0 \right\}$$

$f \begin{cases} x = h(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ t es el parámetro.

Ejemplos:

$$f\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = +\sqrt{t^4 + 2t^2} \end{cases}; t \geq 0$$

$$f\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2sen\theta \end{cases}; 0 \leq \theta \leq \pi$$

Cuidado en identificar ecuaciones paramétricas que no definan una función. Esto sucede cuando la intersección del dominio de x y de y es un conjunto vacío.

Ejemplo: $\begin{cases} x = \sqrt{t-2} \\ y = -\sqrt{1-t} \end{cases}; \ t \geq 0$

Se debe cuidar que $D_x \cap D_y \neq 0$

NOTA: El dominio de una función expresada en forma paramétrica es un conjunto de valores de la variable independiente *x*, no del parámetro.

Funciones dadas por más de una regla de correspondencia.

Una función puede estar constituida por una o más reglas de correspondencia que establecen el vínculo entre la variable *x* y *y* en diferentes intervalos del dominio.

$$y = \begin{cases} -2; x \leq -1 \\ 1; -1 \prec x \leq 2 \\ 4; x \succ 2 \end{cases}$$

En muchos casos este es el modelo matemático que sirve para representar diversos fenómenos en funciones.

2.5 Funciones algebraicas: polinomiales, racionales irracionales. Funciones pares e impares. Funciones trigonométricas directas e inversas y su representación gráfica.

Las funciones algebraicas son aquellas en las que interviene un número finito de operaciones algebraicas de las funciones constante e identidad. Su definición se expresa a través de un número finito de operaciones de sumas algebraicas, productos, divisiones, potenciación y radicación.

Ejemplos:

$$y = \frac{1}{x}$$
$$y = \frac{\sqrt{2x+4}}{x(x-2)}$$

Funciones polinomiales: Son las que se obtienen al efectuar con las funciones constante e identidad un número finito de operaciones de adición, sustracción y multiplicación formándose así un polinomio en la variable independiente.

Una función polinomial es de la forma: $P = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$

Cuyo dominio son los reales, por lo que $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ son números reales y n es el grado si

$a_n \neq 0$.

Ejemplo: $y = x^2 - 5x + 6$

Funciones racionales: Cuando los exponentes de la variable independiente son enteros y positivos, la función se conoce como algebraica racional.

Se definen como el cociente de dos funciones enteras o polinomiales. Las funciones racionales son de la forma $r = \frac{P_1}{P_2}$ en donde P_1 y P_2 son funciones enteras.

Una función racional puede escribirse como:

$$r(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m}$$

donde $P_2(x) \neq 0$

Nota.- Las funciones polinomiales son casos particulares de las funciones racionales.

Ejemplos:

$$r_1(x) = \frac{4x^3 - x + 5}{x^2 + 1}$$
$$r_2(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$$

Funciones irracionales: Cuando los exponentes de la variable independiente son fraccionarios y negativos se le llama algebraica irracional.

En estas funciones intervienen operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación. En cuanto aparece una raíz ya es función irracional.

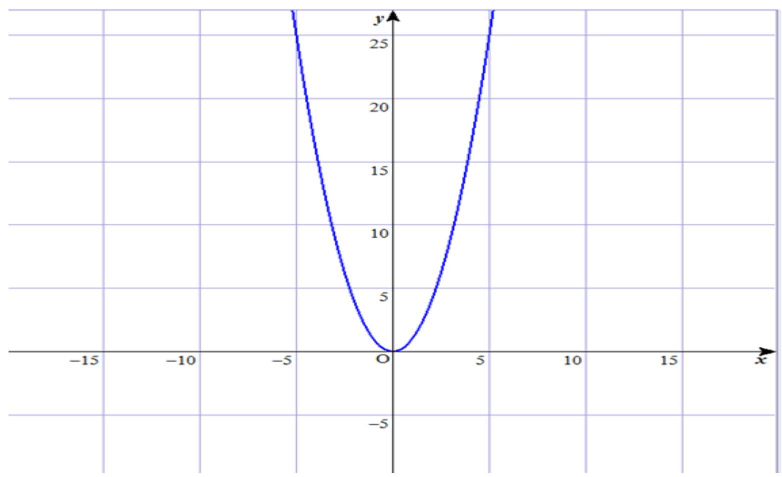
Ejemplos:

$$f(x) = +\sqrt{x^2 - 16}$$
$$g(x) = 6 + \frac{\sqrt{2x}}{3}$$

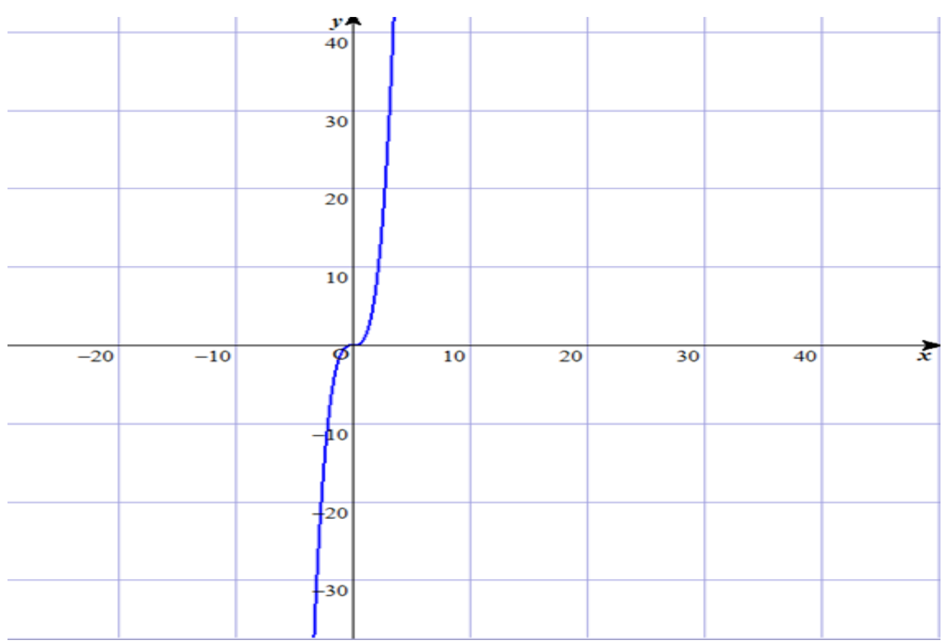
Funciones pares e impares:

Una función es par si se cumple que $f(x) = f(-x);\ \ x \in D_f$, lo que implica que su gráfica es simétrica con respecto al eje *y*.

$$f(x) = x^2$$



Una función es impar si se cumple que $f(-x) = -f(x);\ \ x \in D_f$ lo que implica que su gráfica es simétrica con respecto al origen.



$f(x) = x^3$

2.3 Igualdad de funciones. Operaciones con funciones. Función composición. Función inversa.

Igualdad de funciones: Se dice que dos funciones f y g son iguales si tienen la misma regla de correspondencia y están definidas en el mismo dominio con mapeo en el mismo codominio.

Operaciones con funciones:

Suma de funciones: Se define como suma de las funciones f y g a la función denotada con $f+g$ con dominio $D = D_f \cap D_g$ tal que: $(f+g)(x) = f(x) + g(x); \quad x \in D$

Resta o sustracción de funciones: Se llama diferencia de la función f menos la función g y se denota como $f-g$ a la función dada por: $(f-g)(x) = f(x) - g(x); \quad x \in D = D_f \cap D_g$

Multiplicación de funciones: Es el producto de las funciones f y g cuyo dominio es $D = D_f \cap D_g$, denotada por: $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x); \; x \in D$

División de funciones: Se llama cociente de la función f entre la función g a la función $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}; \; x \in D = D_f \cap D_g; \; g(x) \neq 0$

De las definiciones de suma y producto de dos funciones se tiene que:

- La suma de n funciones reales de variable real: $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ es una función real
- El producto de n funciones reales de variable real: $f_1 f_2 \cdots f_n$ es una función real.
- Si se suma n veces una misma función se tiene: $f + f + f + \ldots f = nf$ (n sumandos)
- Si se multiplica n veces por sí misma la función resulta: $f \cdot f \cdot f \ldots f = f^n$ (n factores)
- Si *m y n* son números naturales entonces: $f^n \cdot f^m = f^{n+m}; \quad D_{f^n} \cap D_{f^m}$
- Definiendo $f^0 = 1$ y $f^{-n} = \frac{1}{f^n}; \; n \in N$

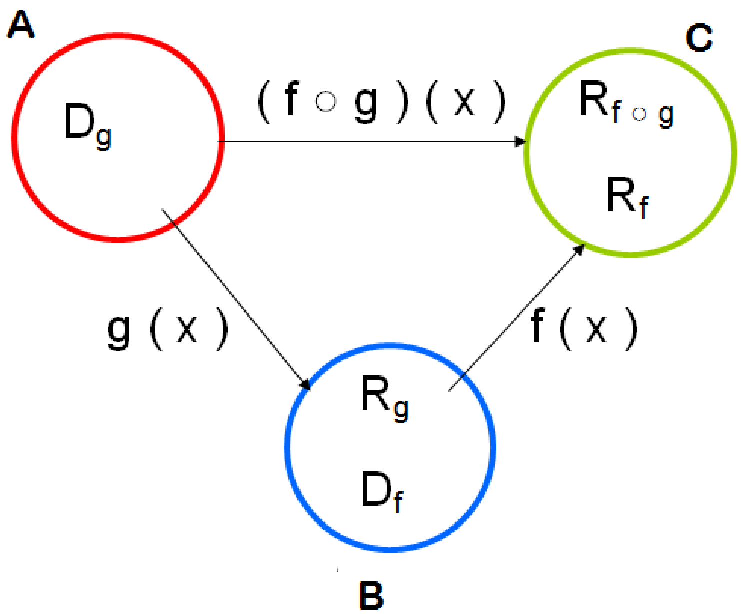
Función Composición.

Dadas las funciones f y g con dominios D_f y D_g respectivamente, se define como composición de la función f con la función g a la función denotada por $f \circ g$ tal que: $[f \circ g](x) = f(g(x))$.

$f \circ g$ se lee f composición g y se trata de la función cuyo dominio está formado por todos los elementos x que pertenecen al dominio g, para los cuales $g(x)$ pertenecen al dominio de f.

$$D_{f \circ g} = \{x | x \in D_g; \; g(x) \in D_f\}$$

Si g tiene su dominio en el conjunto A y su rango en el conjunto B y f tiene su dominio en B y rango en C, entonces $f \circ g$ tendrá su dominio en A y su rango en C. Esquematizando:

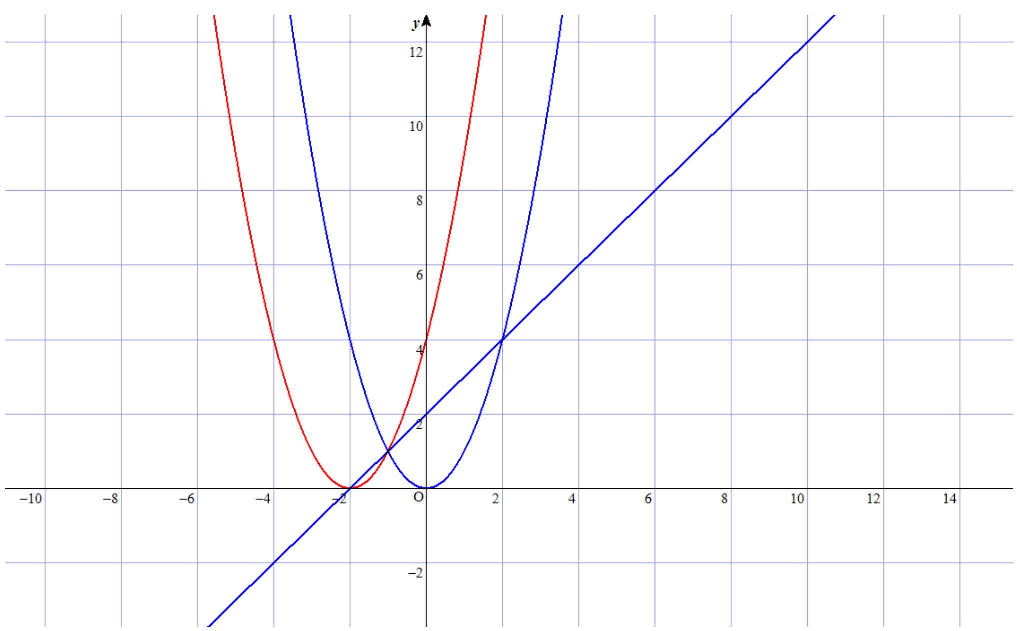


$g(x): A \to B$

$f(x): B \to C$ $\qquad\qquad$ $f \circ g(x): A \to C$

La composición de funciones no es conmutativa.

La gráfica de la función $f \circ g$ puede construirse partiendo de las gráficas de f y g.



Función inversa.

Si f es una función inyectiva entonces la inversa de f es la función f^{-1} definida por:

$$(x,y)\in f^{-1} \text{ si y solo si } (y,x)\in f$$

La inversa de una función se obtiene al intercambiar las componentes de cada una de las parejas ordenadas que constituyen la función f .

Si f^{-1} es la inversa de f , el dominio de f es el rango de f^{-1} y el rango de f es el dominio de f^{-1}.

Es importante recordar que es condición necesaria para que una función tenga inversa, el que sea inyectiva.

Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto a la función identidad.

Dada una función $f=\left\{(x,y)\middle| y=f(x);x\in D_f\right\}$ inyectiva. Su inversa f^{-1} puede obtenerse intercambiando los papeles de las variables dependiente e independiente. Es decir,

$$f^{-1}=\left\{(x,y)\middle| x=f(y);y\in D_f=R_{f^{-1}}\right\}$$

TEOREMA:

Si una función f es inyectiva y su función inversa es f^{-1}:

1) $f\circ f^{-1}=I$, donde el dominio de I es el rango de f ; $D_I=R_f=D_{f^{-1}}$
2) $f^{-1}\circ f=I$, donde el dominio de I es el dominio de f ; $D_I=D_f=R_{f^{-1}}$

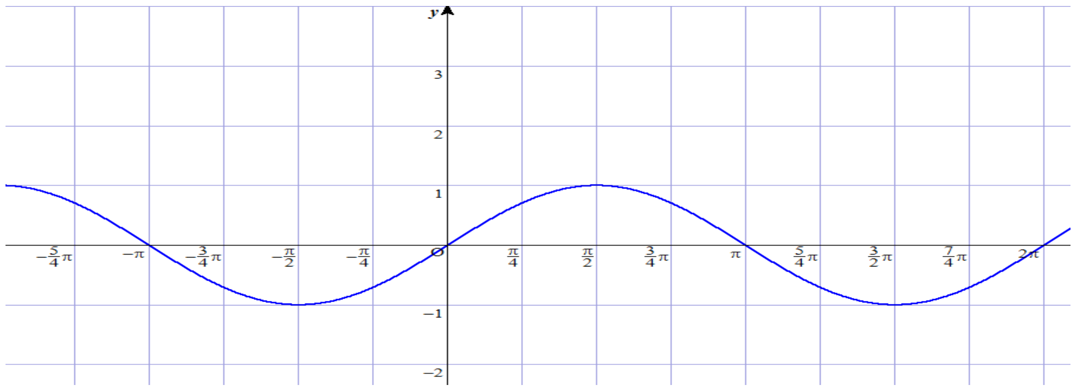
Funciones trigonométricas directas e inversas y su representación gráfica.

Una función que no es algebraica es trascendente. Estas incluyen las funciones circulares directas, circulares inversas, exponenciales de base a y base e; logarítmicas de base a, base e y base 10; y función potencia.

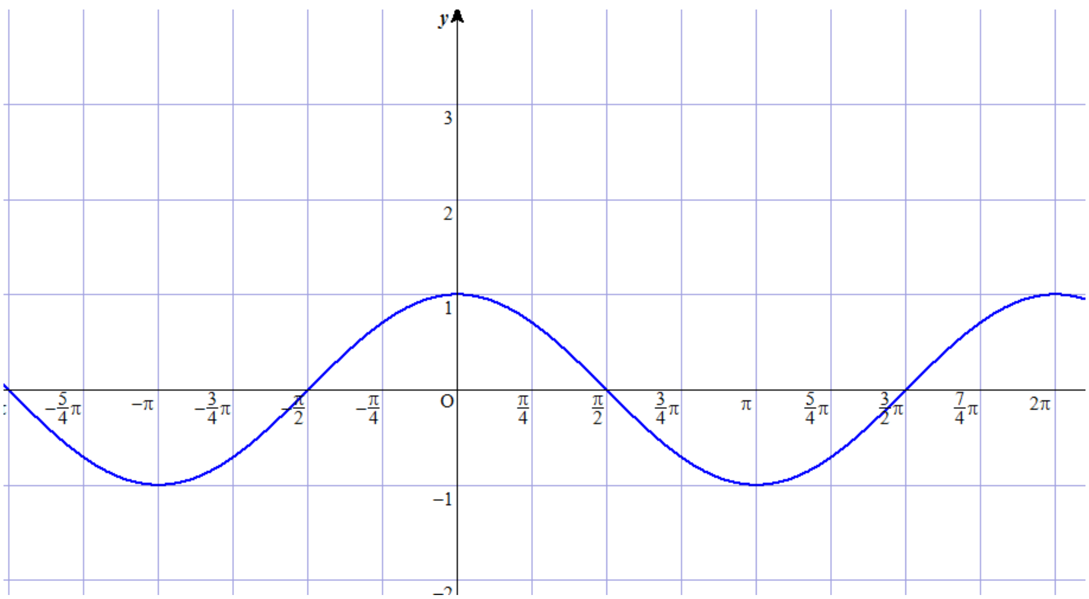
En las funciones circulares directas se encuentran las trigonométricas.

La función seno está definida por $y=sen\theta$; y la función coseno por $x=cos\theta$.

$$y = sen\theta$$



$$x = cos\theta$$



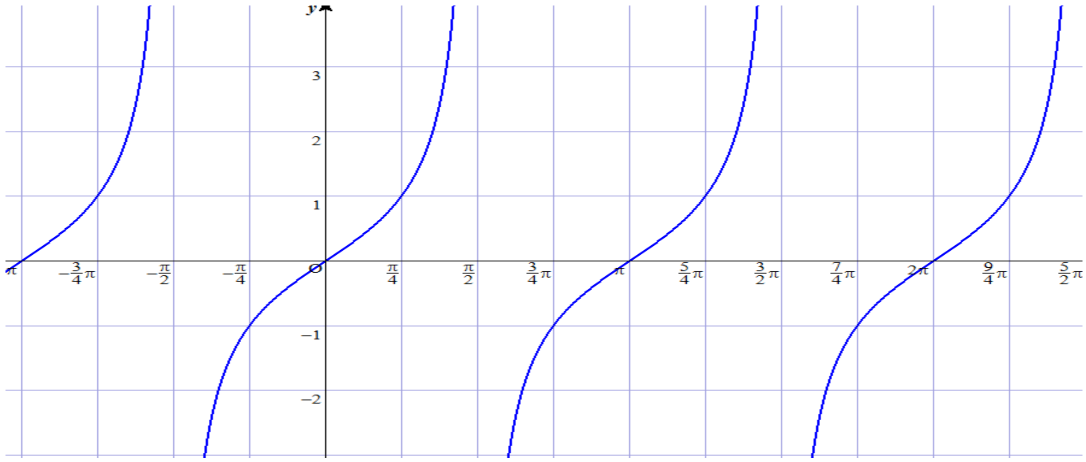
El dominio de ambas funciones es el conjunto de los números reales y su rango es el intervalo $[-1,1]$.

Las funciones seno y coseno son periódicas con período 2π, por lo que:

$$sen\theta = sen(\theta + 2\pi)$$
$$cos\theta = \cos{(\theta + 2\pi)}$$

A partir de las funciones seno y coseno se define la función tangente como:

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \quad \text{donde } cos\theta \neq 0$$



El dominio de la función tangente es el conjunto de los números reales excluyendo los valores de $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$ donde n = 0, +/- 1, +/- 2, ... valores donde se encuentran las asíntotas verticales.

Su rango es el conjunto de los números reales.

La función tangente es una función periódica con período π dado que:

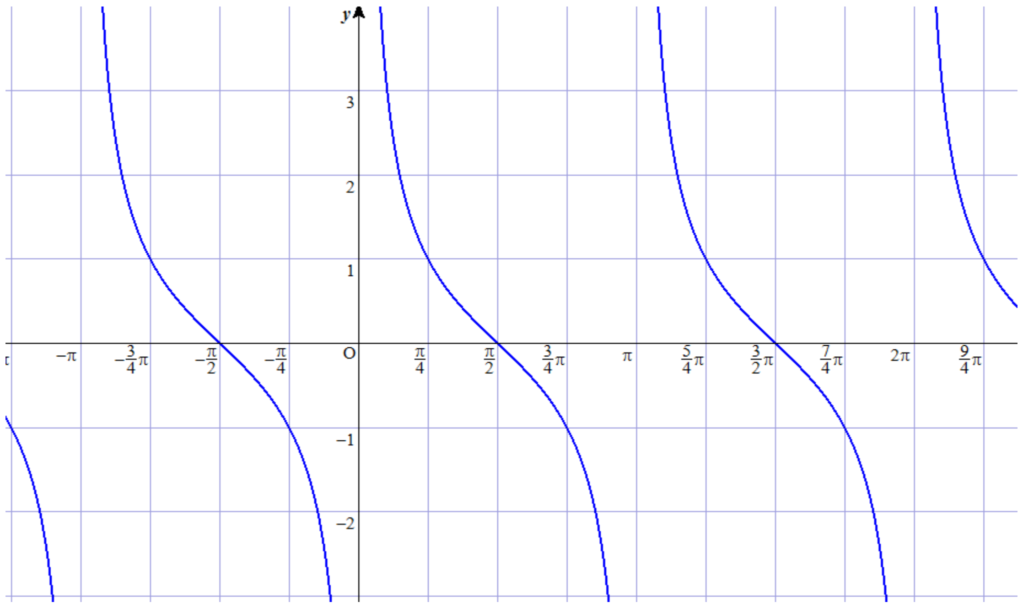
$$\tan(\theta + \pi) = \frac{sen\ (\theta+\pi)}{\cos(\theta+\pi)} = \frac{-\text{sen}\ \theta}{-\cos\theta} = \tan\theta$$

Para valores negativos de θ se tiene:

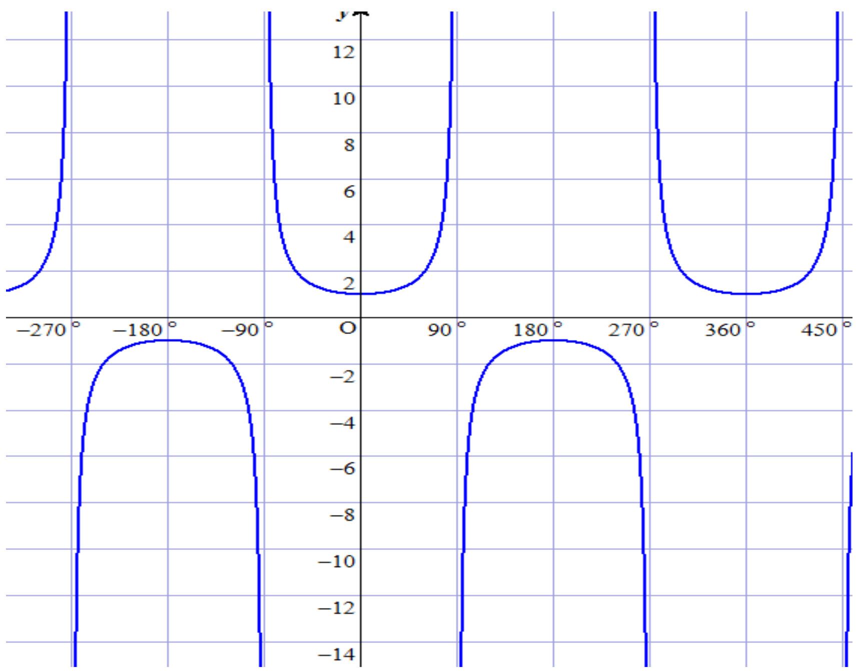
$$\tan(-\theta) = \frac{\text{sen}\ (-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\text{sen}\ \theta}{\cos\theta} = -tan\theta$$

Las funciones trigonométricas cotangente, secante y cosecante se definen como:

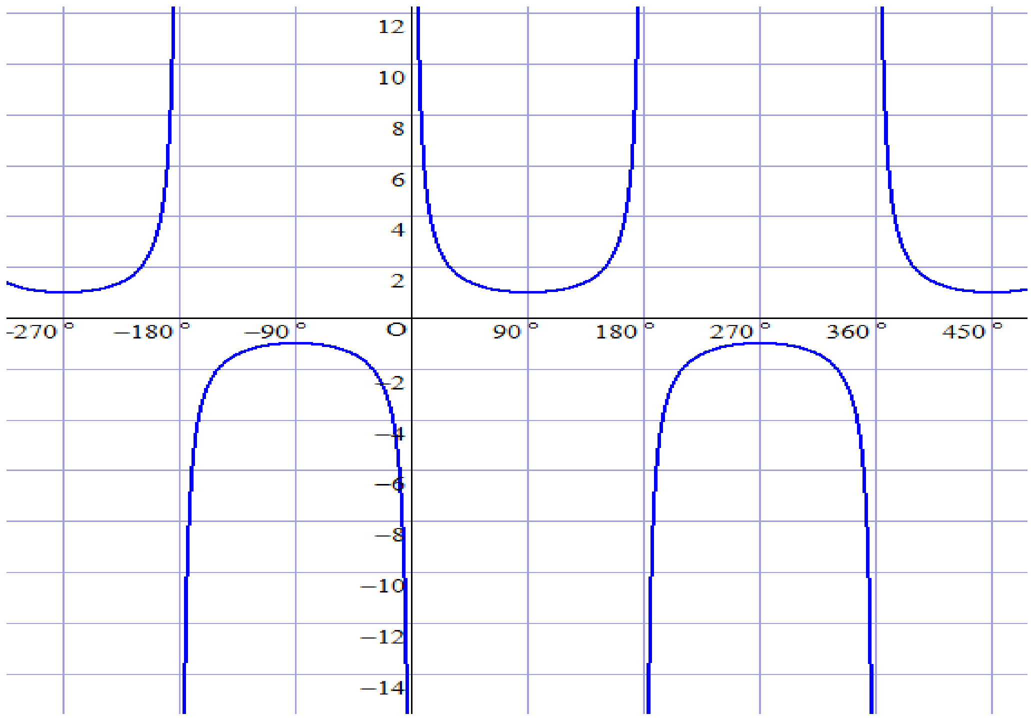
$$cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\ \theta}$$



$$sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$



$$csc\theta = \frac{1}{sen\theta}$$



Funciones inversas de las funciones trigonométricas.

Las seis funciones trigonométricas descritas son periódicas y por tanto no son biunívocas. Luego la inversa de una función trigonométrica no es función.

No obstante, es posible obtener una función biunívoca de una función trigonométrica restringiendo el dominio.

$$y = senx, \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad y \in [-1,1]$$

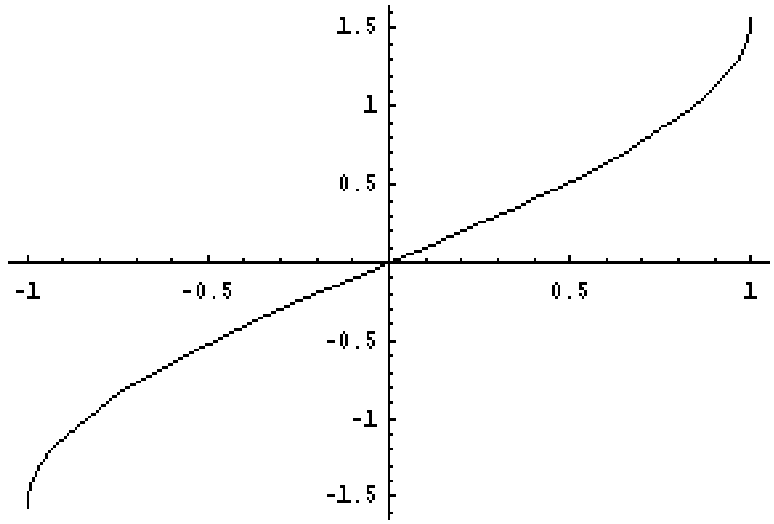
A esta parte de la gráfica se le conoce como la rama principal.

Su función inversa es:

$$x = seny; , \qquad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad x \in [-1,1]$$

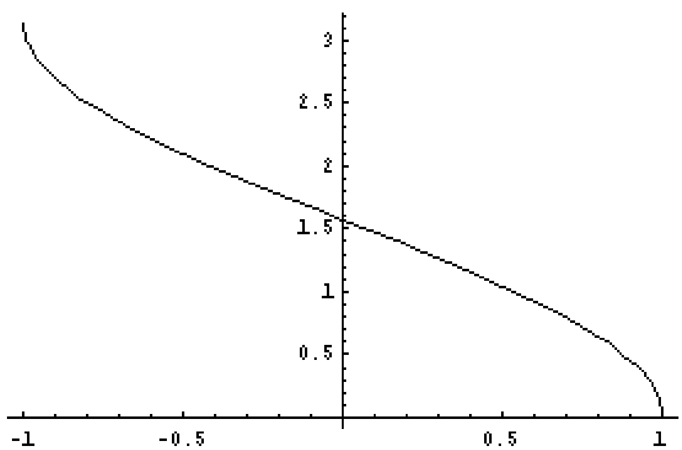
$$y = ang\ sen\ x \;\; \leftrightarrow \;\; x = seny, \qquad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

y su gráfica



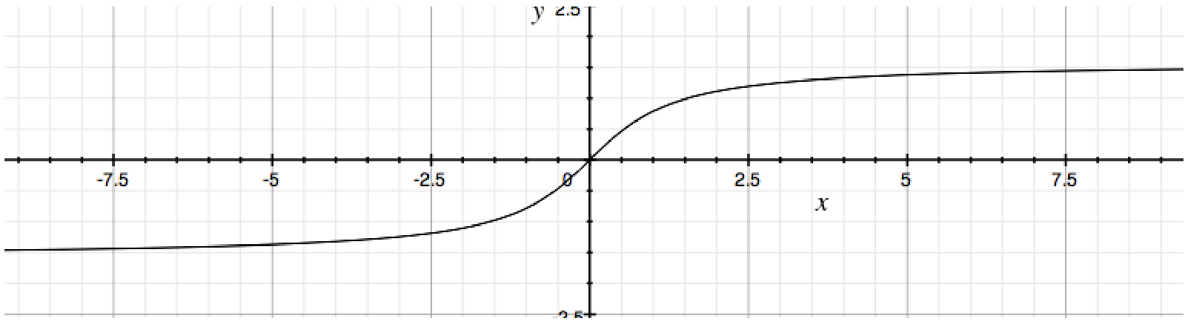
Análogamente, para la función coseno se tiene que si:

$$y = cosx,\ \ x \in [0, \pi],\ \ y \in [-1,1] \quad \text{rama principal}$$
$$x = cosy,\ \ y \in [0, \pi], \qquad x \in [-1,1]$$
$$y = ang \cos x \ \ \leftrightarrow \ \ x = cosy, \qquad y \in [0, \pi]$$



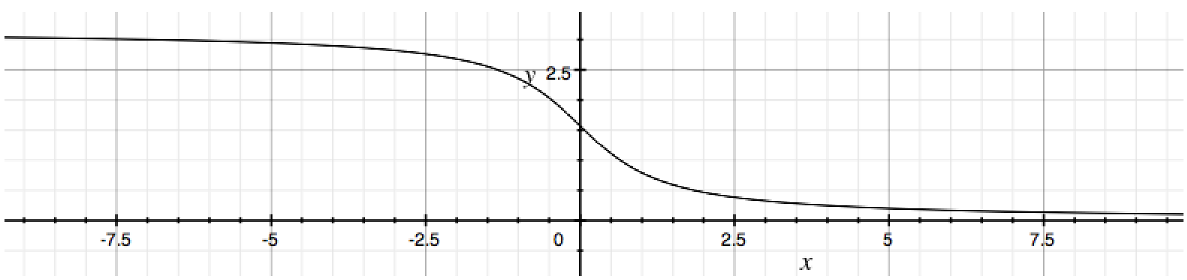
Para la función tangente, si:

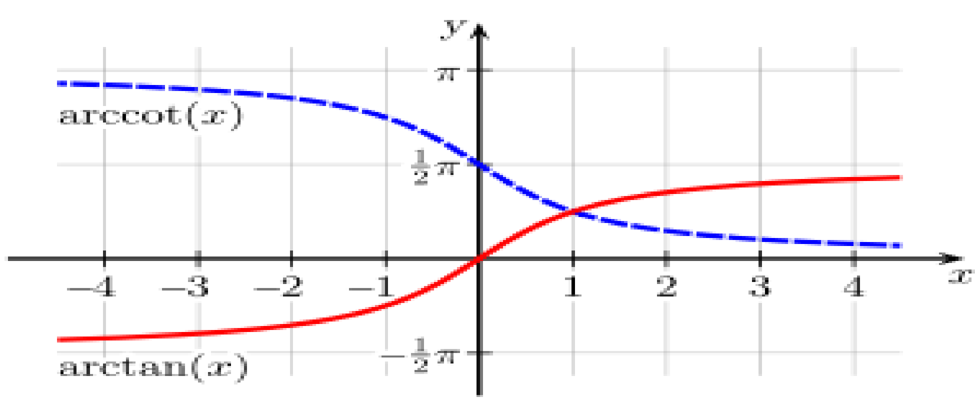
$$y = tanx,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ y\ \in R \text{ rama principal}$$
$$x = tany, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad x \in R$$
$$y = ang \tan x \quad \leftrightarrow \quad x = tany, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$



Para la cotangente, si:

$$y = cotx,\ x \in (0, \pi),\ y \in R \text{ rama principal}$$
$$x = coty, \quad y \in (0, \pi),\ x \in R$$
$$y = ang \cot x \quad \leftrightarrow \quad x = \cot y, \quad y\ \in (0, \pi)$$



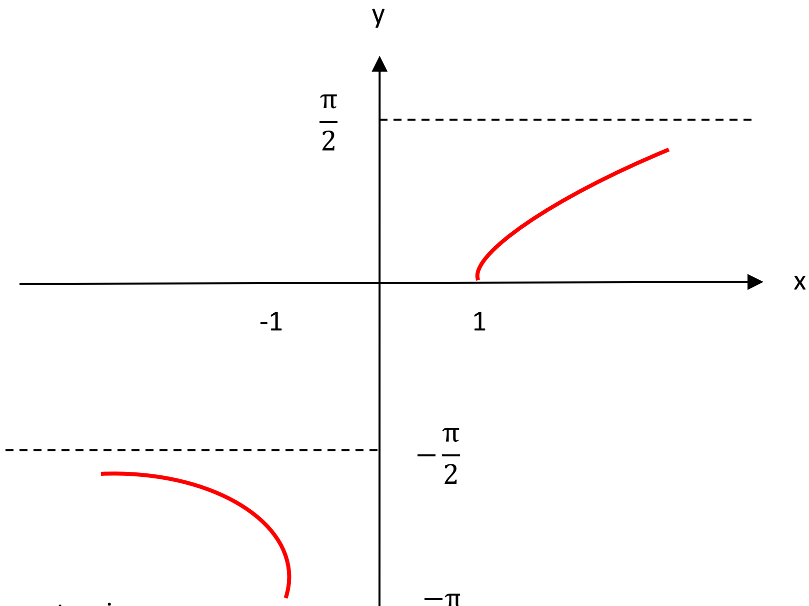


Para la función secante, si:

$$y = secx,\ \ x \in \left\{\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right\},\ \ y \in \{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)\}$$

$$x = secy, \qquad y \ \in \left\{\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right\}, \qquad x \in \{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)\}$$

$$y = ang\ secx \ \ \leftrightarrow \ \ x = secy, \qquad y \in \left\{\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

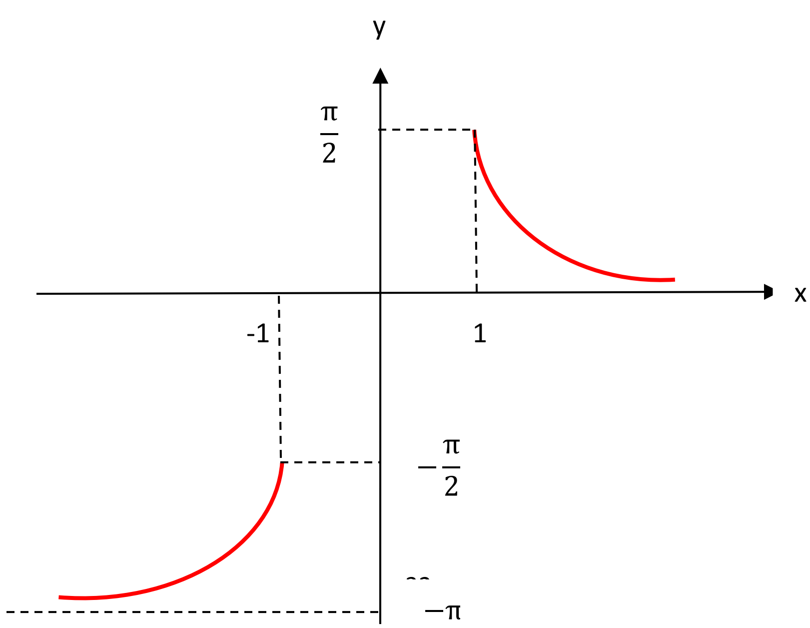


Para la cosecante, si:

$$y = cscx, \qquad x \in \left\{\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right\}, \qquad y \in \{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)\}$$

$$x = cscy, \qquad y \ \in \left\{\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right\}, \qquad x \in \{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)\}$$

$$y = ang\ cscx \ \ \leftrightarrow \ \ x = \csc y, \qquad y \in \left\{\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right\},$$



2.6 La función logaritmo principal natural, sus propiedades y representación gráfica.

La función logaritmo natural de un número real es el exponente al que hay que elevar la base para obtener el número dado.

Si $y^n = x$ donde y es la base, $Ln_y x = n$

$$10^2 = 100; \quad Log\ 100 = 2$$

Propiedades:

$$Ln(1) = 0$$
$$Ln(uv) = Ln(u) + Ln(v)$$
$$Ln\left(\frac{u}{v}\right) = Ln(u) - Ln(v)$$
$$Ln(u^r) = rLn(u)$$

Otras propiedades:

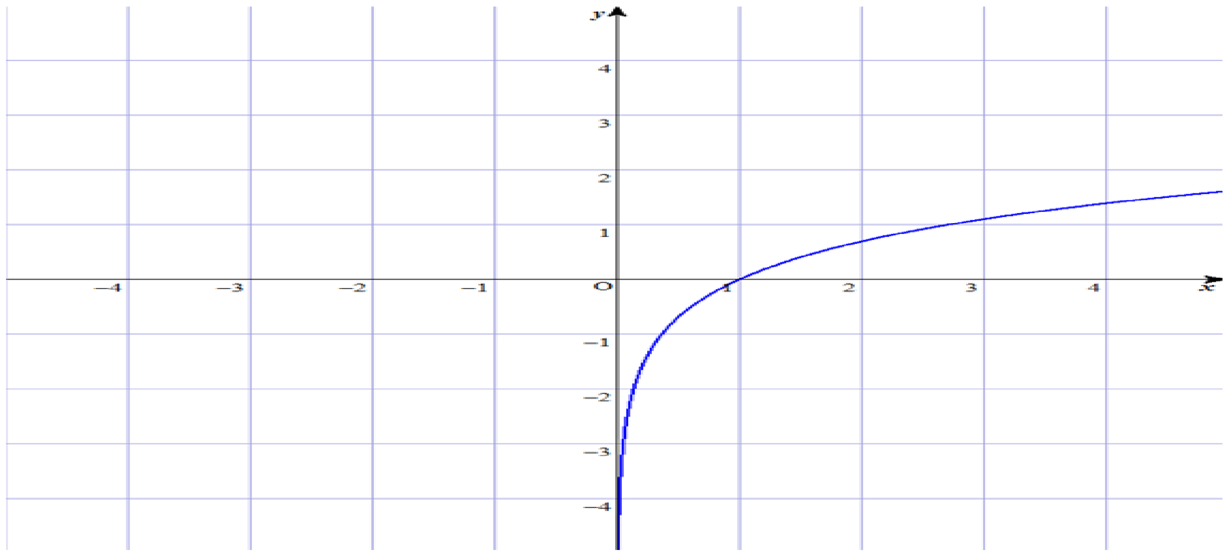
- La base de un sistema de logaritmos no puede ser negativa, si lo fuese, sus potencias pares serian positivas y las impares negativas por lo que se tendría una serie de números alternativamente positivos y negativos.
- Los números negativos no tienen logaritmo porque siendo la base positiva, todas sus potencias son positivas y nunca negativas
- Los números mayores que 1 tienen logaritmo positivo.

Representación gráfica.

Su intervalo de definición es en los reales positivos, por lo que el dominio de la función es $(0, \infty)$, el recorrido de la función son todos los reales, es continua y está representada por una sola regla de correspondencia.

La función logaritmo es una función uno a uno creciente.

$$f(x) = Ln(x)$$



Se observa que la función vale 1 cuando *x* es aproximadamente 2.71.

2.7 La función exponencial, sus propiedades y representación gráfica. Las funciones logaritmo natural y exponencial como inversas. Cambio de base.

Se llama exponencial porque la variable independiente *(x),* es el exponente. La forma general de una función exponencial es de la forma:

$$f(x) = a^x$$

Dependiendo del valor de la base que se asigne se tendrá el valor correspondiente para la función.

De todas las posibles bases para una función exponencial hay una que es más conveniente para fines del Cálculo, las fórmulas quedan muy simplificadas cuando se elige la base para la cual la pendiente de la tangente de la recta es exactamente 1. Ese número se denota con la letra $e \approx 2.71828$

A la función $f(x) = e^x$ se le llama función exponencial natural.

La función exponencial es la inversa de la función $\ln x$ y se denota como e^x.

Para cualquier número racional x, la cantidad e^x está definida por reglas del álgebra elemental:

$$\ln e^x = x \ln e$$
$$\ln e^x = x$$

Por lo que: $e^x = \exp x$ para todo número racional.

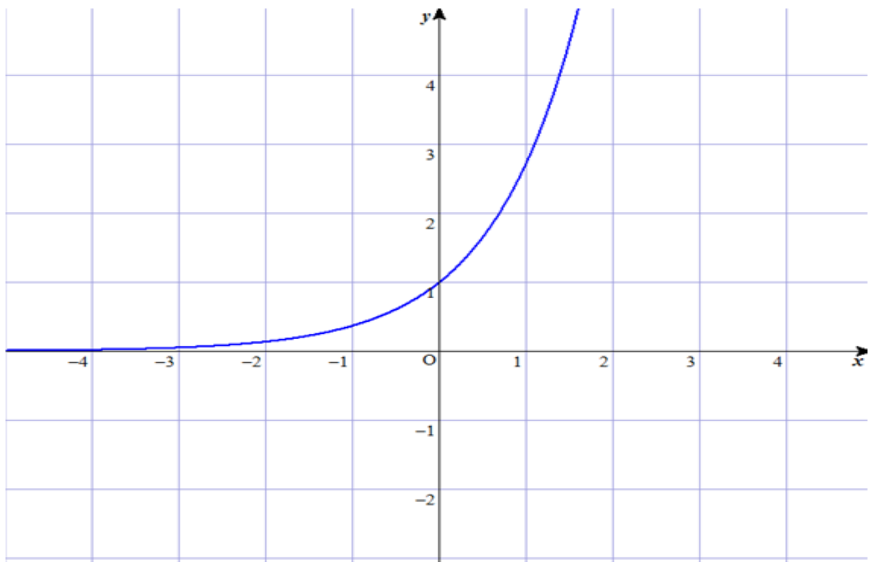
e^x no está definida para valores irracionales de x, pero todo valor de la función exponencial puede ser escrito como una potencia de e, de ahí el nombre de exponencial.

Propiedades:

Si $f(x) = e^x$ entonces:

- La función es creciente para todos los valores de x
- $e^{lnx} = x;\ \ x > 0$
- $\ln e^x = x$
- $e^x e^y = e^{x+y}$
- $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
- $(e^x)^y = e^{xy}$

Gráfica: La función es creciente y cóncava hacia arriba. Se obtiene a partir de la gráfica de *ln x* haciendo una reflexión con la recta de la función identidad.



La función exponencial es la inversa del logaritmo natural, resultado una función cuyo dominio serán los reales y su recorrido son los reales positivos.

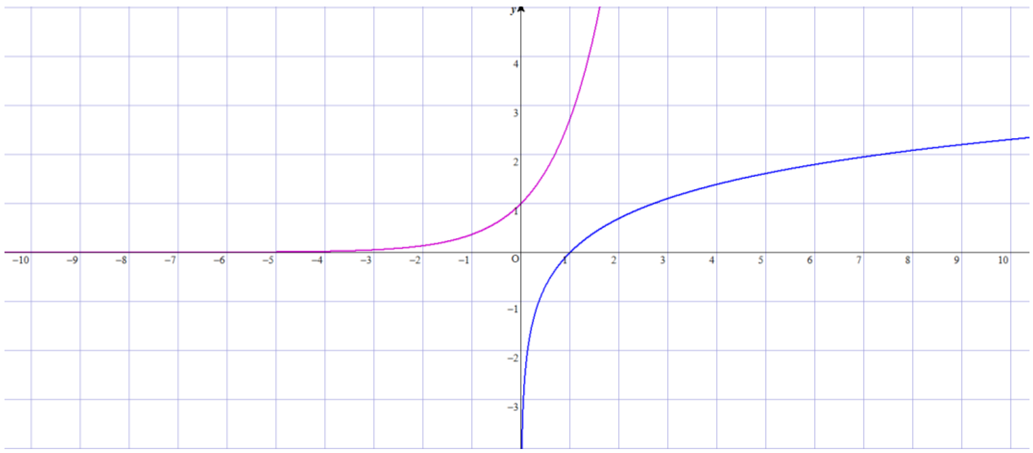
$$y = e^x \leftrightarrow x = \ln y$$

$$\ln y = x$$

$$ln^{-1} = e$$

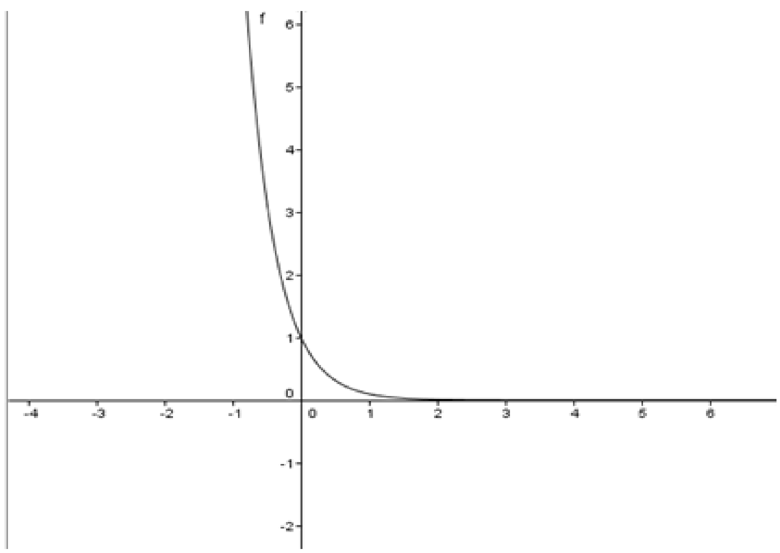
Con estas definiciones se tiene que:

$$e^{(lnx)} = x; \quad x > 0$$
$$\ln(e^x) = x; \quad x \in R$$

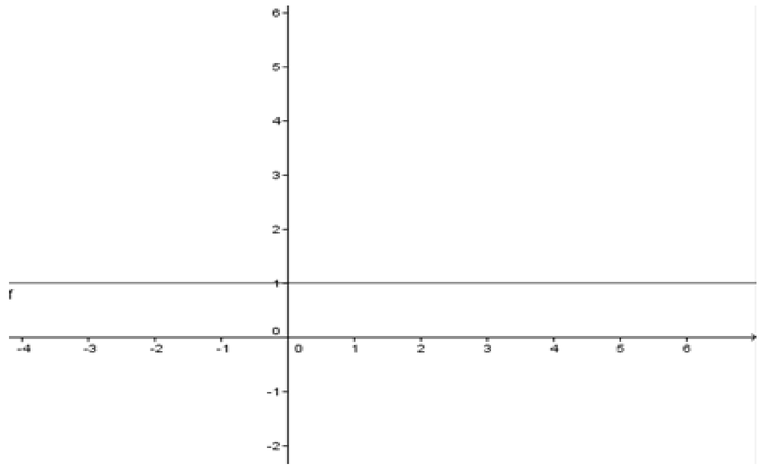


Cambio de base

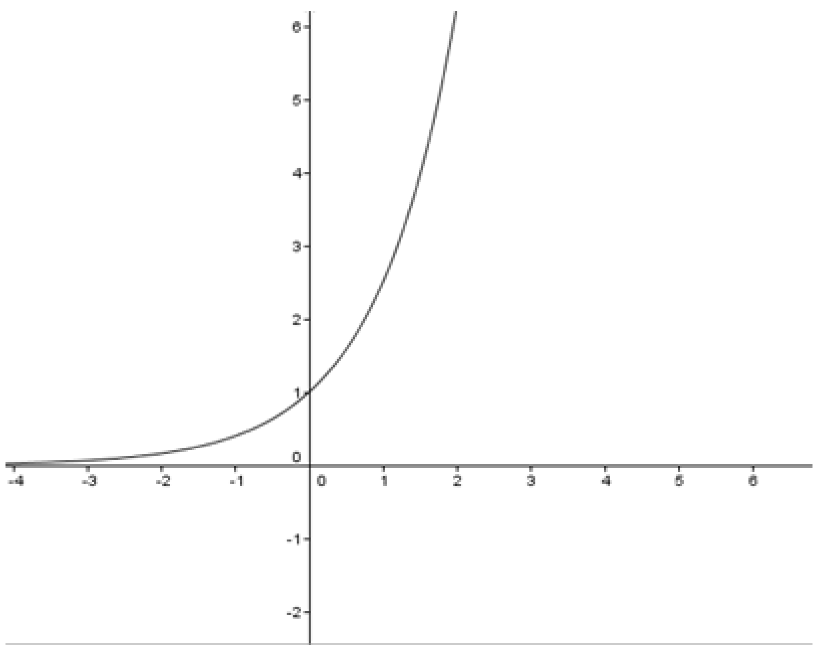
Como se indicó inicialmente la función exponencial se encuentra definida por el valor de su base, así la función es $f(x) = a^x$, existen básicamente tres tipos de funciones exponenciales. Si $0 < a < 1$, la función exponencial decrece:



Si $a = 1$, es una constante:



Si $a > 1$ se tiene una gráfica que crece.



Mientras $a \neq 1$, la función exponencial tiene dominio en los reales y su rango se encuentra en los reales positivos. Si $f(x) = a^{-x}$ se tendrá justamente la reflexión de la función exponencial sobre el eje y.

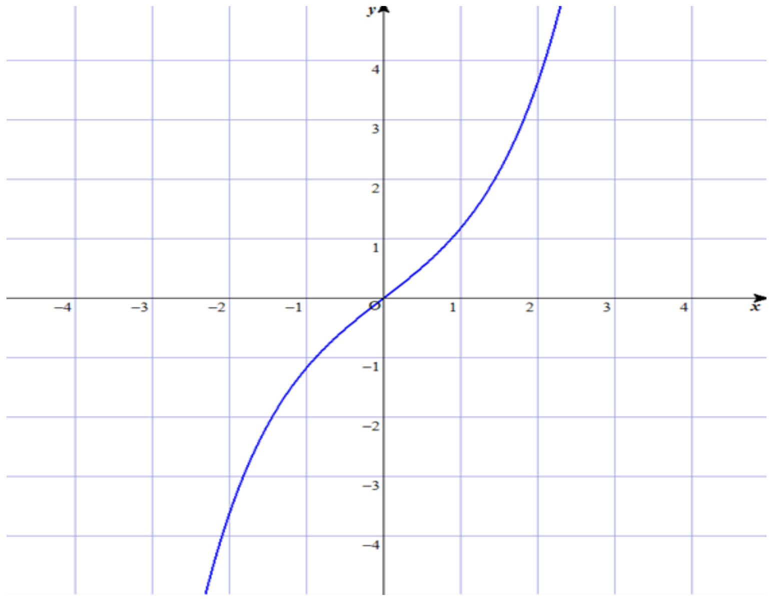
2.8 Las funciones hiperbólicas, directas e inversas.

Las funciones hiperbólicas se definen en relación con la hipérbola equilátera.

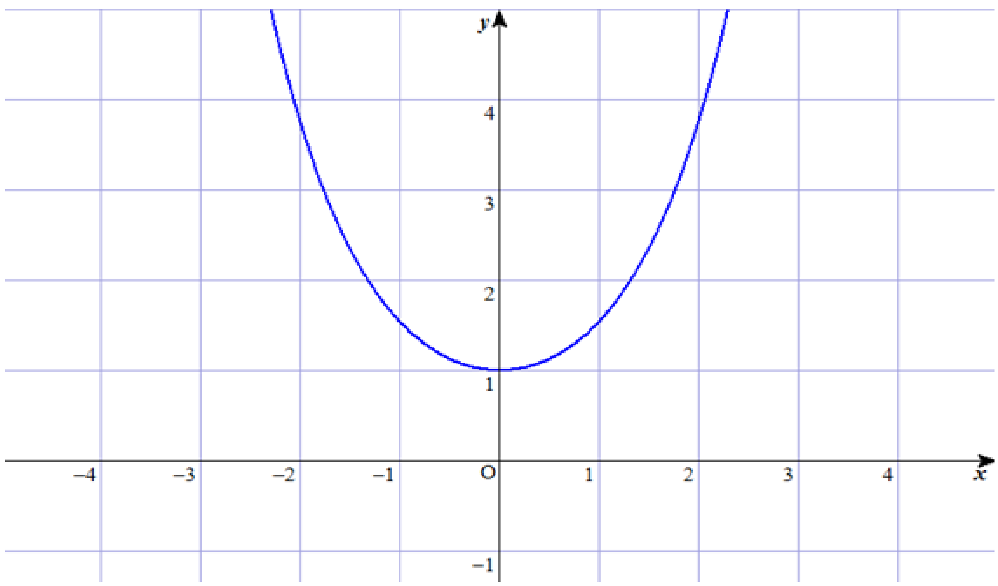
Se define un número real θ como el doble del área del sector hiperbólico. Este número se llama la medida hiperbólica del ángulo con arco de la hipérbola.

Las expresiones que definen el seno y coseno hiperbólicos son las siguientes:

$$senh\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$$

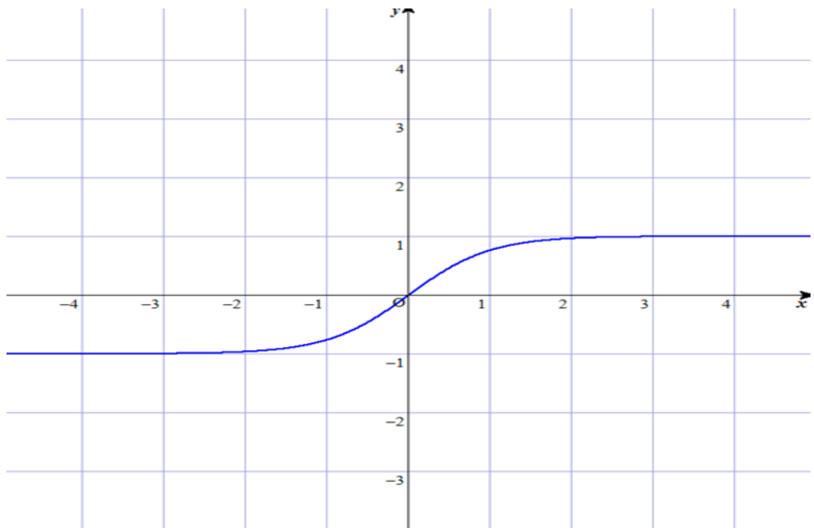


$$cosh\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$$

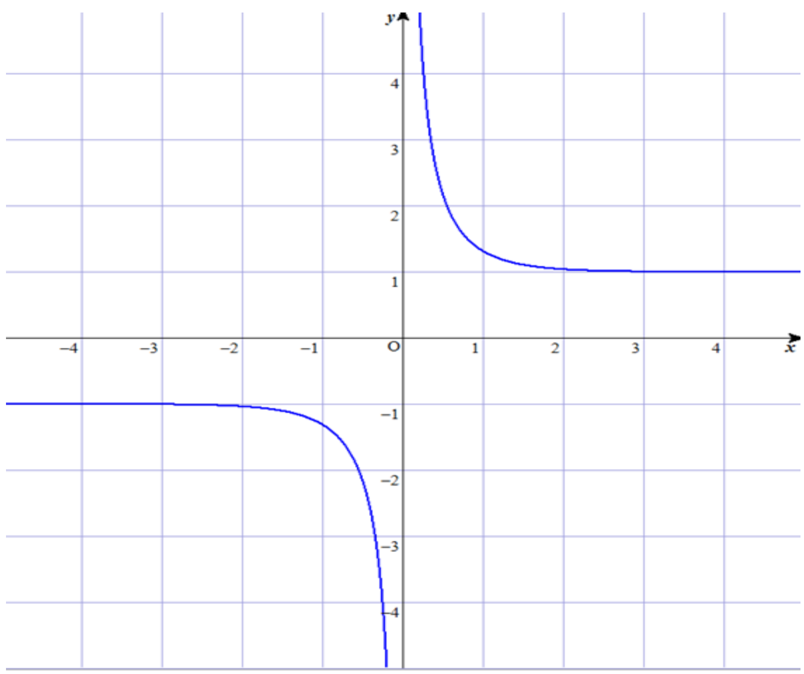


Las otras cuatro funciones hiperbólicas definidas son:

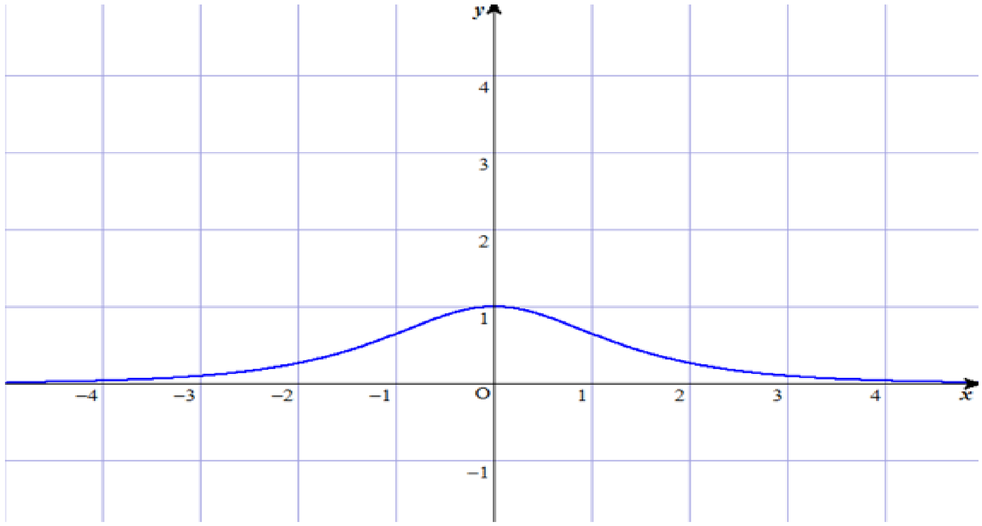
Tangente hiperbólica: $\frac{senhx}{coshx} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$



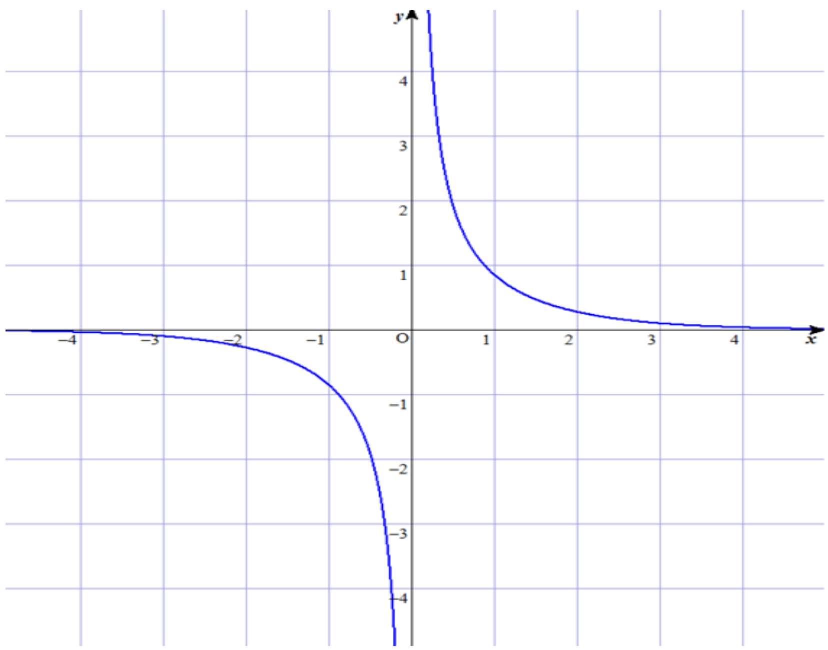
Cotangente hiperbólica: $cothx = \frac{coshx}{senhx} = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$



Secante hiperbólica: $sechx = \frac{1}{coshx} = \frac{2}{e^{x}+e^{-x}}$



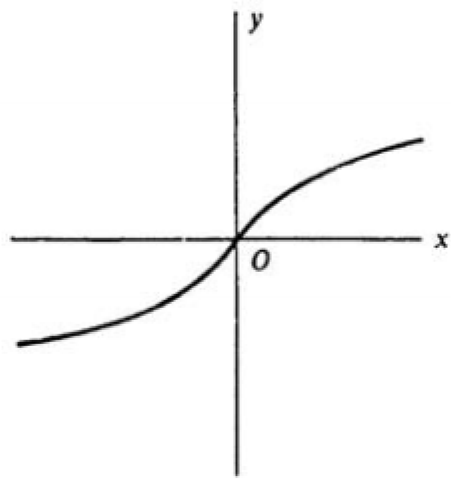
Cosecante hiperbólica: $cschx = \frac{1}{senhx} = \frac{2}{e^{x}-e^{-x}}$



Inversas de las funciones hiperbólicas

Como la función $sen\ hx$ es inyectiva, además de que su dominio y recorrido está en los reales, su inversa se obtiene mediante el argumento del seno hiperbólico, se denota como $sen\ h^{-1}$ y se define como $y = sen\ h^{-1}x$ si y solo si $x = sen\ h\ y$

El dominio y recorrido de la inversa son todos los reales.



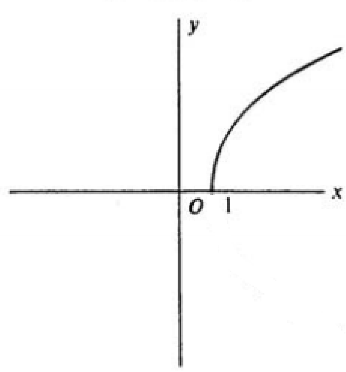
La función coseno hiperbólico es una función par, por lo que no es inyectiva, por lo tanto no tiene inversa. Sin embargo si se define:

$$f(x) = coshx; \;\; x \geq 0$$

Entonces, se tiene obtiene una función inyectiva y su inversa es el argumento coseno hiperbólico:

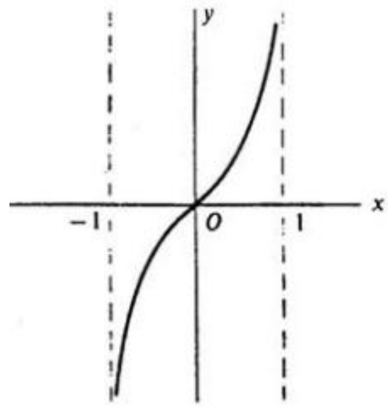
$$y = \cos h^{-1}x \quad si\ y\ solo\ si\ \ x = coshy \quad y \geq 0$$

El dominio de la inversa es de $[1, \infty)$ y el recorrido es $[0, \infty)$

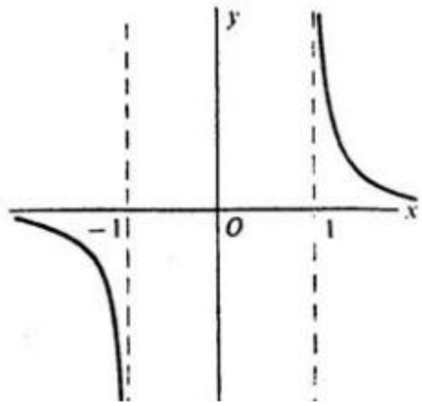


Las funciones, tangente hiperbólica, cotangente hiperbólica y cosecante hiperbólica son continuas y monótonas por lo que sus inversas se definen como:

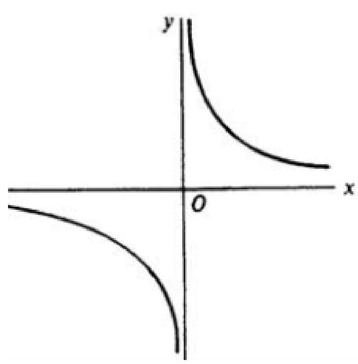
$$y = \tan h^{-1}x \quad si\ y\ solo\ si\ \ x = \tan hy$$



$$y = coth^{-1}x \quad si\ y\ solo\ si\ \ x = \cot hy$$

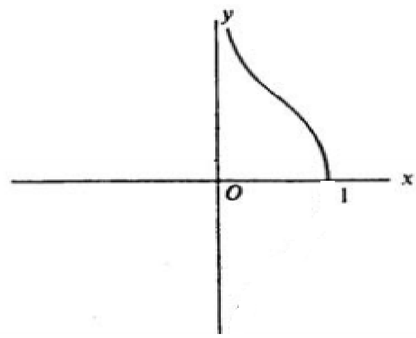


$$y = csch^{-1}x \quad si\ y\ solo\ si\ x = \csc h\ y$$



La función secante hiperbólica tampoco tiene inversa, por lo que se modifica su dominio para obtener su inversa correspondiente. Si $f(x) = sechx$; $x \geq 0$ entonces su inversa será:

$$y = sech^{-1}x \quad si\ y\ solo\ si \quad x = \sec h\ y \quad y \geq 0$$



2.9 Formulación de funciones como modelos matemáticos de problemas físicos y geométricos.

Las funciones son modelos matemáticos que representan algún fenómeno físico de la vida real.

Para el planteamiento de funciones no existen reglas precisas ni método general. La recomendación en este sentido sería identificar cuáles son los datos, variables e incógnitas del problema, y después encontrar alguna relación entre ellos. Es de especial ayuda el trazo de una gráfica o diagrama.

3. Límites y continuidad

3.1 Concepto de límite de una función en un punto. Interpretación geométrica.

Límite de una variable.

Se dice que la variable x tiende a la constante "a", o bien, que el límite de $x\ es\ a$, si para todo número $\delta > 0$ (por pequeño que sea éste) siempre se verifica que $|x - a| < \delta$

Límite de una función

Dada una función $f(x)$ y los números $a\ y\ L$, se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a "a" es L, y se escribe como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, si para todo número positivo ε existe un número positivo δ tal que:

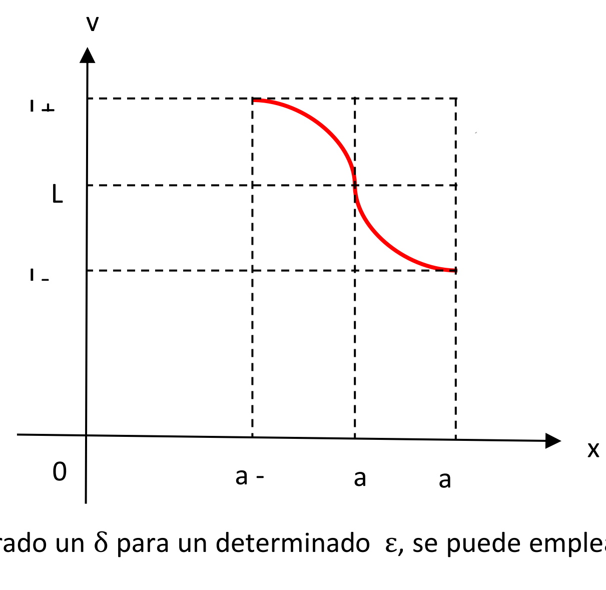
$|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$

La anterior definición establece que los valores de la función $f(x)$ se aproximan a un límite L a medida que x se aproxima a un número a, si el valor absoluto de la diferencia entre $f(x) y\ L$, se puede hacer tan pequeño como se quiera, tomando x suficientemente cercana a "a" pero no igual a "a".

Interpretación geométrica de límite

La interpretación geométrica expresa que, dado ε, debe ser posible encontrar un δ tal que la función se encuentre en el rectángulo limitado por las rectas $x = a - \delta,\ x = a + \delta,\ y = L - \varepsilon,\ y = L + \varepsilon$

Nada se dice acerca del valor de $f(x)$ cuando $x\ es\ a$.



Nota.- Una vez encontrado un δ para un determinado ε, se puede emplear el mismo δ para todos los ε mayores.

Geométricamente esto significa que si la función se encuentra en un rectángulo, también está contenida en otro rectángulo del mismo ancho pero de mayor altura.

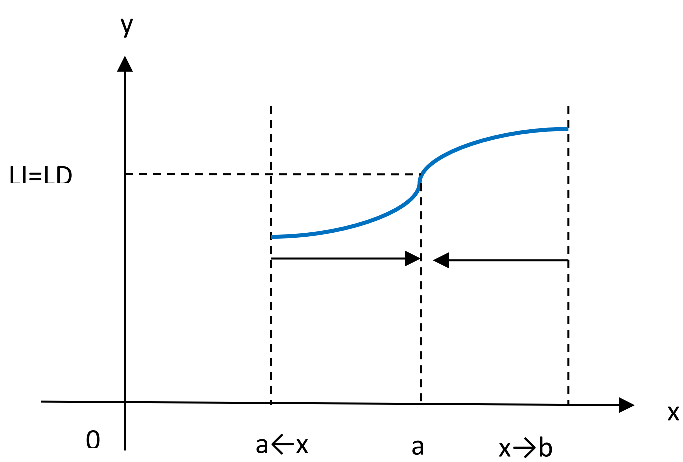
3.2 Existencia de límite de una función. Límites de las funciones constante e identidad. Enunciados de teoremas sobre límites. Formas determinadas e indeterminadas. Cálculo de límites.

Existencia del límite de una función:

- Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo $[a, b]$ y sea el valor "c" en el interior del intervalo, entonces $\underset{x \to c}{lim} f(x) = L$, si $L \in R$ y $\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x)$

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |(x - c)| < \infty$$

Entonces se pueden definir los límites en los extremos del intervalo tanto por la derecha de a y por la izquierda de b, siempre que estos límites existan.



Por lo que si el límite existe, es único.

Unicidad de los límites:

Si una función $f(x)$ está definida en un entorno del punto $x = a$, entonces $f(x)$ no puede tener dos límites distintos cuando *x* tiende al valor "a".

Límite de la función constante

Sea $f(x)$ una función constante. El límite de $f(x)$ cuando x tiende a un número a cualquiera, es igual a la constante. Esto es, si

$$f(x) = k \quad \text{entonces} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} k = k$$

Límite de la función identidad

Sea $f(x)$ la función identidad. El límite de $f(x)$ cuando x tiende a cualquier número a es igual al número a. Es decir, si

$$f(x) = x \quad \text{entonces} \quad \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x = a$$

Enunciados de teoremas sobre límites:

SIGNOS DE LOS Límites

Si una función $f(x)$ es positiva o nula en un entorno del punto $x = a$, entonces el límite de $f(x)$ cuando x tiende al valor a es positivo o nulo.

Análogamente, si una función $f(x)$ es negativa o nula en un entorno del punto $x = a$, entonces el límite de $f(x)$ cuando x tiende al valor a es negativo o nulo.

Límite de una suma

Si $f(x)$ es la suma de un número finito de funciones de x que tienen límite cuando x tiende al número a, entonces $f(x)$ tiene límite cuando x tiende al valor a y dicho límite es igual a la suma de los límites cuando x tiende al número a.

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

Límite de un Producto

Si una función $f(x)$ es el producto de un número finito de funciones de x que tienen límite cuando x tiende al valor a, entonces el límite de $f(x)$ cuando x tiende al número a existe y es igual al producto de los límites en este punto.

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

Límite de un COCIENTE

Si $f(x)$ es el cociente de dos funciones de x que tienen límite cuando x tiende al número a y el límite del denominador es distinto de cero, entonces el límite de $f(x)$ cuando x tiende al valor a existe y es igual al cociente de los límites en ese punto.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \; ; \quad \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

Límite de una Raíz enésima

Si $f(x)$ es una función que tiene límite L cuando x tiende al número a, L es positivo y n (índice de la raíz) es un número entero positivo, entonces el límite de la raíz enésima de $f(x)$ cuando x tiende al valor a es igual a la raíz enésima del límite de $f(x)$ es ese punto.

Lo anterior también se cumple si L es negativo o cero y n es un número entero impar positivo.

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$

Formas determinadas:

Las formas determinadas de un límite se presentan en los casos en que un cociente tiene como resultado de cada uno de sus límites:

$$a, 0, \infty$$
$$\frac{0}{a} = 0; \ \frac{\infty}{a} \to \infty; \ \frac{a}{0} \to \infty; \ \frac{a}{\infty} \to 0$$

Formas indeterminadas:

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Cálculo de límites

Se hace el cálculo de límites por medio de sustitución directa, es decir se sustituye en la expresión la variable independiente *x* por el valor de a. Si la expresión $f(x)$ permite obtener $f(a)$. Si se trata de una suma o producto de funciones se obtiene la suma o producto de los límites.

Si se trata de un cociente de funciones $\frac{f(x)}{g(x)}$; se pueden presentar los siguientes casos:

- Si el límite de $f(x)$ es cero y el límite de $g(a) \neq 0$, el límite de la función es cero.
- Si el límite de $f(x)$ es distinto de cero y el límite de $g(x)$ es cero, la función no tiene límite pues tiende a infinito.
- Si el límite de $f(x)$ tiende a infinito y el límite de $g(x)$ es diferente de cero, el límite de la función tiende a infinito
- Si el límite de $f(x)$ es distinto de cero y el límite de $g(x)$ tiende a infinito el límite de la función es cero

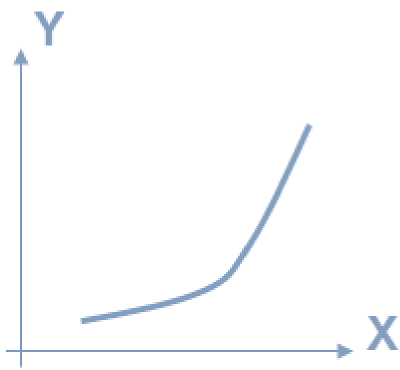
Si se obtiene la forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ se pueden hacer transformaciones algebraicas sencillas para obtener un cociente equivalente que permite calcular el límite.

Ejemplos

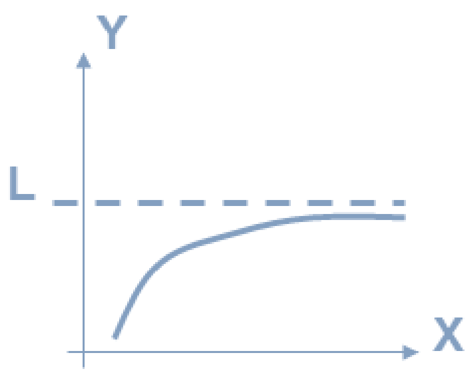
3.3 Definición de límite de una función cuando la variable independiente tiende a infinito. Cálculo de límites de funciones racionales cuando la variable tiende al infinito. Límites infinitos.

Definición de límite de una función cuando la variable independiente tiende a infinito

Se tiene en esta ocasión que la función tiene a infinito, pues la variable independiente tiende a infinito si se tiene una función creciente.



$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$



$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

Se tiene $\varepsilon > 0$ por pequeño que sea que existe un valor N tan grande como se quiera tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x > N$.

En estos casos se observa la presencia de asíntotas verticales u horizontales en la gráfica de la función.

Cálculo de límites de funciones racionales cuando la variable tiende al infinito

Al tener un cociente de funciones $\frac{f(x)}{g(x)}$; para obtener su límite cuando la variable independiente tiende a infinito se presentan los siguientes casos:

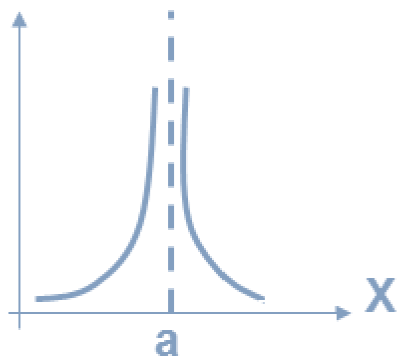
- Si el límite del numerador tiende a infinito y el denominador tiene límite, la función tiende a infinito.
- Si el numerador tiene límite y el denominador tiende a infinito, la función tiene límite cero.
- Si se presenta la forma indeterminada del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, se dividen ambos términos por la máxima potencia de *x* que se presenta en la función.

Si el grado del numerador es mayor que el denominador, el límite de la función tiende a infinito

Si el grado del numerador es menor que el denominador, el límite de la función es cero

Si los grados del numerador y denominador son iguales, el cociente tiene límite distinto de cero.

Límites infinitos.



$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Se tiene el caso en que la variable independiente tiende a un valor a pero el límite no existe pues lo valores de la función crecen o decrecen sin cota.

3.4 Obtención del límite $senx, cosx, \frac{sen\,x}{x}$ cuando $x \to 0$. Cálculo de límites de funciones trigonométricas.

$$\lim_{x \to 0} senx = 0$$
$$\lim_{x \to 0} cosx = 1$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$$

Cálculo de límites de funciones trigonométricas.

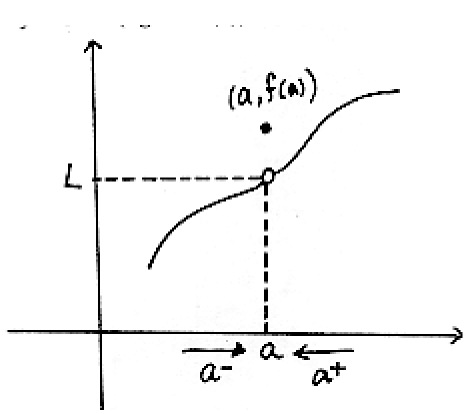
Func \ Rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞
sec	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-1	∞	1
csc	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	∞

Ejemplos:

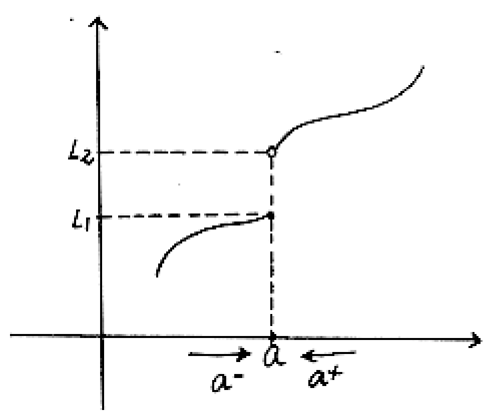
3.5 Concepto de continuidad. Límites laterales. Definición y determinación de la continuidad de una función en un punto y en un intervalo. Enunciado de los teoremas sobre continuidad.

Concepto de continuidad.

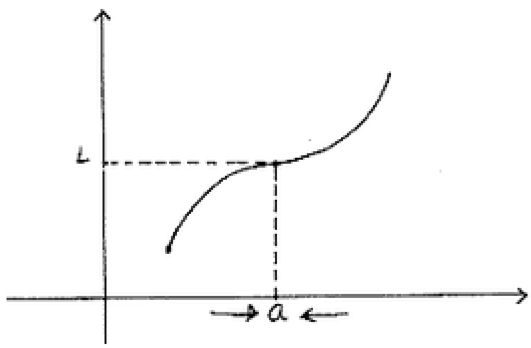
Una función es continua cuando la función se encuentra perfectamente definida en los puntos del dominio. En la gráfica la continuidad se observa cuando ésta no se interrumpe o no produce saltos de un punto a otro o cuando el trazo de la gráfica no tiene "huecos".



Discontinua



Discontinua

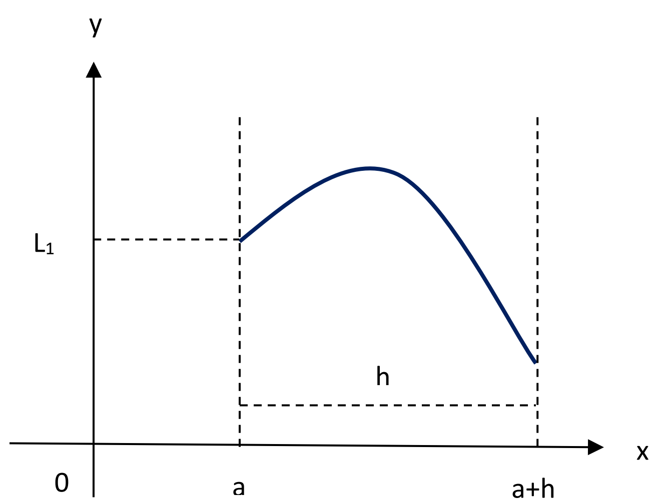


Continua

Límites laterales

LÍMITE LATERAL POR LA DERECHA

Sea $y = f(x)$ donde x está definida en el intervalo abierto $(a, a+h)$ donde $h \in R,\ h > 0$, como se muestra en la siguiente figura:



El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a "a" por la derecha es L_1 y se denota:

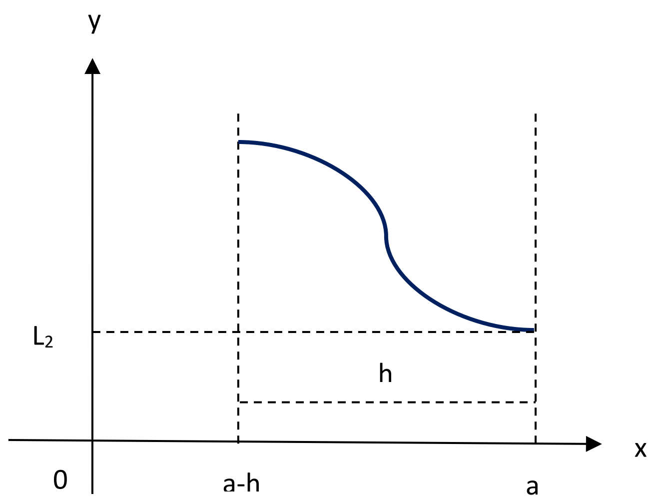
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$$

Si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que: $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < x - a < \delta$.

Observar que esta última expresión no tiene barras de valor absoluto para $x - a$, ya que si $x > a$; $x - a > 0$.

LÍMITE LATERAL POR LA IZQUIERDA

Sea $y = f(x)$ donde x está definida en el intervalo abierto $(a-h, a)$ donde $h \in R,\ h > 0$, como se observa en la siguiente figura:



El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a "a" por la izquierda es L_2 y se denota:

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L_2$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que: $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que

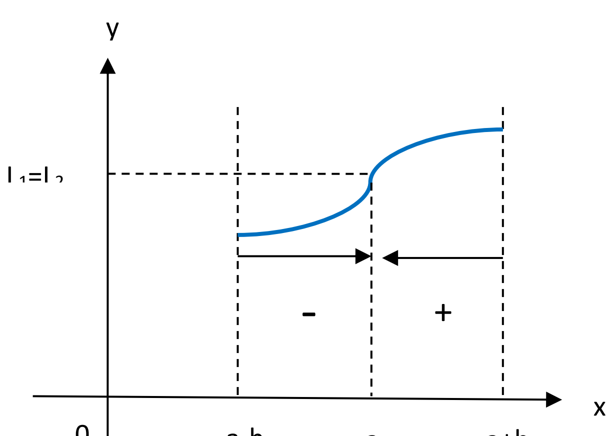
$0 < x - a < \delta$

En esta última expresión no hay barras de valor absoluto para $a - x$, ya que si $a > x$, $a - x > 0$.

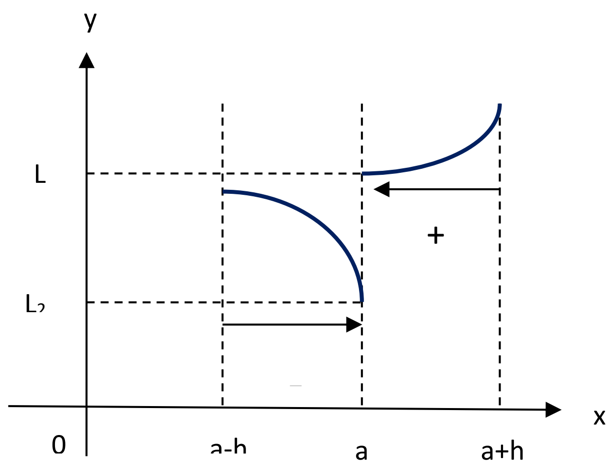
TEOREMA

Si $f(x)$ tiene límite cuando x tiende al valor a y este límite es el número L, entonces los límites cuando x tiende a a por la izquierda y por la derecha, existen y ambos son iguales a L.

La interpretación geométrica de lo anterior se muestra en la siguiente figura:



Por el contrario, si los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes, el $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe.



Definición y determinación de la continuidad de una función en un punto y en un intervalo.

CONTINUIDAD EN UN PUNTO

La función f es continua en el valor a $\in D_f$, siempre y cuando se cumpla que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

La definición anterior implica que se cumplan las siguientes condiciones:

- Que $f(a)$ esté definida.
- Que exista $\lim_{x \to a} f(x)$
- Que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Basta con que una de las tres condiciones no se cumpla para que la función f no sea continua en el valor a. Sin embargo, la tercera condición es necesaria y suficiente para que la función $y = f(x)$ sea continua en a.

CONTINUIDAD EN UN INTERVALO

Intervalo abierto: La función f es continua en el intervalo abierto (a, b) si y sólo si es continua para todo valor de x que esté dentro del intervalo.

Intervalo cerrado: La función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ si y sólo si es continua para todo valor de$x$ que esté en del intervalo abierto (a, b), así como continua por la derecha en a y por la izquierda en b.

La función f es continua por la derecha de a si y sólo si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

La función f es continua por la izquierda de b si y sólo si

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

Nota.- Para investigar la continuidad de una función en un intervalo se analizan solamente los valores en los cuales haya cambio de regla de correspondencia, o bien, donde no se pudieran cumplir los teoremas vistos.

TEOREMAS SOBRE CONTINUIDAD

Si f y g son dos funciones continuas en $x = a$, entonces:

i) La suma de dos funciones que son continuas en un punto, también es continua en el punto, $f + g$ es continua en $x = a$.
ii) La resta de dos funciones que son continuas en un punto, también es continua en el punto, $f - g$ es continua en $x = a$
iii) El producto de dos funciones que son continuas en un punto, también es una función continua en el punto, $f \cdot g$ es continua en $x = a$
iv) El cociente de dos funciones que son continuas en un punto, también es una función continua en el punto, con tal de que la función divisor no se anule en dicho punto, $f \div g$ es continua en $x = a$, siempre que $g(x) \neq 0$.

- Si $f(x)$ es una función polinómica, entonces es una función continua para todos los valores de su dominio.
- Si $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ es una función racional, entonces $f(x)$es continua para todo su dominio siempre que $h(x) \neq 0$.

4. La derivada y aplicaciones.

4.1 Definición de la derivada de una función en un punto. Interpretación física y geométrica. Notaciones y cálculo a partir de la definición. Función derivada.

Razón media de variación (promedio): Esta razón media de variación de y con respecto de x, cuando la variable independiente varía de x hasta Δx, es igual al cociente del incremento de la variable dependiente entre el incremento de la variable independiente, es decir: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (también conocido como cociente incremental)

Definición de derivada de una función en un punto.

Se define como la derivada de la función $y = f(x)$ con respecto a x en un punto x_0 al límite, si existe, del cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando Δx tiende a cero.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

El valor de la derivada de una función depende del punto en donde se calcule.

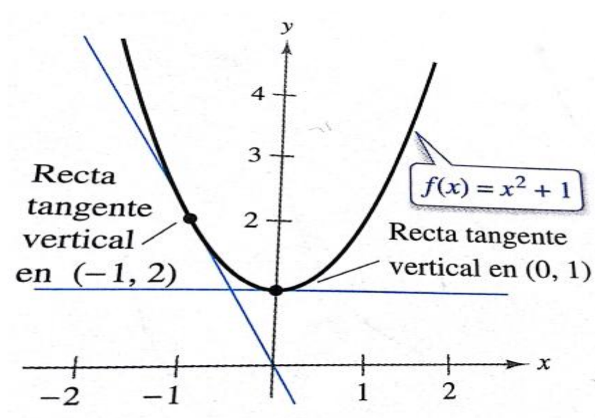
Interpretación física:

La derivada se utiliza para determinar la razón instantánea de cambio de una variable con respecto a otra. Un uso frecuente de la razón de cambio consiste en describir el movimiento de un objeto que va en línea recta. En tales problemas, la recta del movimiento se suele representar en posición horizontal o vertical.

Se observa claramente en la función aceleración donde la variable independiente se encuentra representada por el tiempo, dependiendo del incremento que tenga el tiempo se obtendrá el resultado de la aceleración. Por ello se indica que la aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo.

$$\Delta a = a(t + \Delta t) - a(t)$$

Interpretación geométrica:



El límite utilizado para definir la pendiente de una recta tangente a la función se utiliza para definir la operación de derivación.

Si la función está definida en un intervalo abierto que contien a c y además existe el límite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = m$$

Notaciones:

La derivada de la función $y = f(x)$ puede escribirse:

$y' \ o \ f'(x)$	Notación de Lagrange
$D_x y \ \ o \ \ Dx[f(x)]$	Notación de Cauchy
$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} \ \ o \ \ \frac{d}{dx} f(x)$	Notación de Leibniz
$\dot{y} \ \ o \ \ f(\dot{x})$	Notación de Newton

Cálculo de la derivada a partir de la definición (método de los cuatro pasos)

Sea $y = f(x)$ .... $\quad (1)$

1er paso: Se incrementa en Δx el valor de la variable independiente, resultando incrementada la variable dependiente y, en Δy.

$y + \Delta y = f(x + \Delta x) \ldots \quad (2)$

2do paso: Se calcula el incremento de la variable dependiente, restando la expresión (2) menos (1).

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \ldots \quad (3)$

3er paso: Se calcula el cociente de los incrementos, dividiendo (3) entre Δx.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

4to paso: Se calcula el límite del cociente de los incrementos $\frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}}$ cuando $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta \mathrm{x} \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta \mathrm{x} \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Si este límite existe, entonces dicho límite es la derivada deseada:

$$\lim_{\Delta \mathrm{x} \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = D_x y$$

Ejemplos.

Función derivada.

La derivada de una función de x también es una función de x. Esta nueva función proporciona la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(x, f(x))$. El proceso de calcular la derivada de una función se llama derivación.

Si la derivada $f'(x)$ existe en todos los puntos de un intervalo abierto (a, b), entonces $f(x)$ es derivable en ese intervalo.

Cuando $f'(x)$ no existe en uno o más puntos del intervalo, entonces la función $f(x)$ no es derivable en uno o más puntos de dicho intervalo.

Si el dominio de una función continua $f(x)$ es el intervalo cerrado $[a, b]$ no puede hablarse de la derivabilidad de la función en el intervalo.

Frecuentemente el dominio de la función derivada es el mismo que el de la función original, aunque no sucede siempre.

REGLA DE LA POTENCIA

Si *n* es un número racional, entonces la función $f(x) = x^n$ es derivable y $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$; para que f sea derivable en $x = 0$, *n* debe ser un número tal que x^{n-1} se encuentre definido en un intervalo que contenga al 0.

4.2 Derivación de la suma, producto, cociente de funciones. Derivación de una función elevada a un exponente racional. Derivación de una función elevada a un exponente real.

DERIVADA DE LA FUNCIÓN CONSTANTE

Sea la función constante $f(x) = c$, la derivada de esta función vale cero.

Derivación de la suma, producto, cociente de funciones.

DERIVADA DE UNA SUMA DE FUNCIONES

La derivada de la suma (o resta) algebraica de un número finito de funciones es igual a la suma (o resta) algebraica de las derivadas de las funciones.

$$h(x) = f(x) + g(x)$$
$$\frac{dh}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

DERIVADA DEL PRODUCTO DE DOS FUNCIONES

La derivada del producto de dos funciones es igual al producto de la primera función por la derivada de la segunda, más el producto de la segunda por la derivada de la primera.

Esta fórmula puede aplicarse más de una vez si se trata del producto de *n* funciones derivables, haciendo uso de la ley asociativa de la multiplicación.

$$h(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$\frac{d}{dx} f(x) \cdot g(x) = f(x) \frac{d}{dx} g(x) + g(x) \frac{d}{dx} f(x)$$

DERIVADA DEL PRODUCTO DE UNA CONSTANTE POR UNA FUNCIÓN

Como corolario de lo anterior, la derivada del producto de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

$$h(x) = \alpha f(x)$$
$$\frac{d}{dx} \alpha f(x) = \alpha \frac{d}{dx} f(x)$$

DERIVADA DEL COCIENTE DE DOS FUNCIONES

La derivada del cociente de dos funciones es igual al producto del denominador por la derivada del numerador, menos el producto del numerador por la derivada del denominador, y todo dividido entre el cuadrado del denominador.

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x) \frac{d}{dx} f(x) - f(x) \frac{d}{dx} g(x)}{[g(x)]^2}$$

Derivación de una función elevada a un exponente racional.

La derivada de la raíz cuadrada de una función es igual al cociente de la derivada del subradical entre el doble de la misma raíz.

$$h(x) = \sqrt{f(x)}$$
$$\frac{d}{dx} h(x) = \frac{\frac{d}{dx} f(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

También se puede plantear la función como:

$h(x) = [f(x)]^{\frac{1}{2}}$ y aplicar la derivación de una función elevada a un exponente real.

Derivación de una función elevada a un exponente real

La derivada de la potencia de una función elevada a un exponente real, es igual al producto del exponente por la función elevada al exponente disminuido en una unidad y por la derivada de la función.

$$h(x) = [f(x)]^n$$
$$\frac{d}{dx}h(x) = n[f(x)]^{n-1}\frac{d}{dx}f(x)$$

4.3 Derivación de la función compuesta. Regla de la cadena. Derivada de la función inversa.

Derivación de la función compuesta

Si se tienen las funciones $y = f(u)$ y $u = g(x)$, se sabe que $y = f(g(x))$ es una función de función, o bien, la composición de las funciones dada, definida para todo valor de x del dominio D_g y el recorrido se encuentre en R_f.

Por lo que la derivada de la función compuesta es: $\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'\big(g(x)\big)g'(x)$

Es necesario saber calcular la derivada de y con respecto a x sin sustituir a u por $g(x)$.

Esta derivación nos lleva a la *Regla de la Cadena*:

TEOREMA:

Sean las funciones $y = f(u)$ y $u = g(x)$ derivables tales que $y = f\big(g(x)\big) \; \forall \; x \in D_g$ que hace que $g(x) \in D_f$.

Entonces, la derivada de y con respecto a x está dada por $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

Al aplicar la regla de la cadena, es útil considerar que la función compuesta está constituida por do partes: una interior y otra exterior.

Interior : $g(x) = u$; Exterior: f

La derivada de $y = f(u)$ es la derivada de la función exterior multiplicada por la derivada de la función interior.

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

Derivada de la función inversa

Si $y = f(x)$ es una función biyectiva, derivable y $f'(x) \neq 0$.

Siendo su función inversa $x = f^{-1}(y)$, entonces la derivada de la inversa es: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

Es posible obtener la derivada de la función inversa a partir de la derivada de la función dada, sin tener que determinar su inversa.

4.4 Derivación de las funciones trigonométricas directas e inversas. Derivación de las funciones hiperbólicas directas e inversas.

Derivación de las funciones trigonométricas directas e inversas

Para la derivación de las funciones trigonométricas se utiliza $u = f(x)$ la cual es una función derivable.

$$y = senu \qquad \frac{dy}{dx} = cosu\frac{du}{dx}$$
$$y = cosu \qquad \frac{dy}{dx} = -senu\frac{du}{dx}$$
$$y = tanu \qquad \frac{dy}{dx} = sec^2u\frac{du}{dx}$$
$$y = cotu \qquad \frac{dy}{dx} = -csc^2u\frac{du}{dx}$$
$$y = secu \qquad \frac{dy}{dx} = secu\ tanu\frac{du}{dx}$$
$$y = cscu \qquad \frac{dy}{dx} = -cscu\ cotu\frac{du}{dx}$$

En términos generales y considerando la función identidad, las derivadas de las funciones trigonométricas directas son:

$\frac{d}{dx}(senx) = cosx$	$\frac{d}{dx}(cscx) = -cscx\ cotx$
$\frac{d}{dx}(cosx) = -senx$	$\frac{d}{dx}(secx) = secx\ tanx$
$\frac{d}{dx}(tanx) = sec^2x$	$\frac{d}{dx}(cotx) = -csc^2x$

Derivadas de trigonométricas inversas.

$$y = ang\ sen\, u; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$$
$$y = ang\cos u\,; \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$y = ang\tan u\,; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$$

$$y = ang\cot u\,; \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$$

$$y = ang\sec u\,; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}$$

$$y = ang\ csc\ u; \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}$$

En términos generales y considerando la función identidad, las derivadas de las funciones trigonométricas inversas son:

$\frac{d}{dx}(ang\ senx) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx}(ang\ cscx) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\frac{d}{dx}(ang\ cosx) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx}(ang\ secx) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\frac{d}{dx}(ang\ tanx) = \frac{1}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx}(ang\ cotx) = -\frac{1}{1+x^2}$

Derivada de la función logaritmo natural y exponencial:

$$y = \ln u\,; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\,\frac{du}{dx}$$

$$y = e^u; \quad \frac{dy}{dx} = e^u\,\frac{du}{dx}$$

$$y = a^u; \quad \frac{dy}{dx} = a^u \ln a\,\frac{du}{dx}$$

Derivación de una función elevada a otra función

$$y = u^v \quad donde \quad u = f(x); \quad v = g(x)$$

$$\frac{1}{y}\,\frac{dy}{dx} = v\frac{1}{u}\,\frac{du}{dx} + \ln u\,\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{v}{u}\,\frac{du}{dx} + lnu\,\frac{dv}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = u^v\left(\frac{v}{u}\,\frac{du}{dx} + lnu\,\frac{dv}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = v\,u^{v-1}\,\frac{du}{dx} + u^v\ lnu\,\frac{dv}{dx}$$

Derivación de las funciones hiperbólicas directas e inversas.

$$\frac{d}{dx}(senh\,u) = \cosh u\,\left(\frac{du}{dx}\right)$$
$$\frac{d}{dx}(\cosh u) = senh\,u\,\left(\frac{du}{dx}\right)$$
$$\frac{d}{dx}(\tanh u) = sech^2\,u\,\left(\frac{du}{dx}\right)$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \left(\frac{du}{dx}\right)$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \left(\frac{du}{dx}\right)$$
$$\frac{d}{dx}(\coth u) = -csch^2\,u\left(\frac{du}{dx}\right)$$

Hiperbólicas inversas:

$$\frac{d}{dx}(senh^{-1}u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\left(\frac{du}{dx}\right)$$
$$\frac{d}{dx}(cosh^{-1}u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\left(\frac{du}{dx}\right)$$
$$\frac{d}{dx}(tanh^{-1}u) = \frac{1}{1-u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)$$
$$\frac{d}{dx}(csch^{-1}u) = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2+1}}\left(\frac{du}{dx}\right)$$
$$\frac{d}{dx}(sech^{-1}u) = -\frac{1}{u\sqrt{1-u^2}}\left(\frac{du}{dx}\right)$$
$$\frac{d}{dx}(coth^{-1}u) = \frac{1}{1-u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)$$

4.5 Definición de derivadas laterales. Relación entre derivabilidad y continuidad

Definición de derivadas laterales

La existencia de la derivada, siendo ésta un límite, está relacionada con la existencia de los límites laterales y con la igualdad entre ellos.

$$\frac{d}{dx}f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0^-}\frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Estos límites laterales son la derivada lateral por la izquierda y la derivada lateral por la derecha, respectivamente. Se denotan de la siguiente manera:

Derivada lateral por la izquierda:

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Derivada lateral por la derecha:

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Con lo anterior, si $f'(x_0)$ existe si $f'_{-}(x_0) = f'_{+}(x_0)$ = $f'(x_0)$

Relación entre derivabilidad y continuidad

Si la función $f(x)$ es derivable en el punto $x = x_1$, entonces la función es continua en dicho punto.

Toda función derivable en un punto, es continua en éste, pero no toda función continua en un punto es derivable en el mismo.

La continuidad es una condición necesaria para la existencia de la derivada, pero no es condición suficiente.

Una función $f(x)$ es derivable en el punto x_1 sí y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones:

1. $f(x)$ es continua en x_1
2. $f'_{-}(x_1) = f'_{+}(x_1)$

Si cualquiera de ellas no se verifica, entonces no existe $f'(x_1)$.

4.6 Derivación de funciones expresadas en las formas implícita y paramétrica

Funciones expresadas en forma implícita:

En una función presentada en forma implícita la variable dependiente no está despejada. Sin embargo, es posible obtener la derivada de "y" respecto a x usando el proceso conocido como "derivación implícita".

Funciones expresadas en forma paramétrica:

Como se vio previamente, existe otra forma de representar una función, que es la forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Para calcular la derivada de "y" con respecto a x de una función expresada en forma paramétrica se usa la siguiente fórmula:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

4.7 Definición y cálculo de derivadas de orden superior.

Al derivar una función se obtiene una nueva función, si esta nueva función $f'(x)$ es derivable, entonces al derivarla se obtiene otra función de x, que puede representarse por $f''(x)$, llamada la segunda derivada de $f(x)$. Esto es:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

Las notaciones utilizadas son:

$\frac{d^2y}{dx^2}$ o $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ Notación de Leibniz

y'' o $f''(x)$ Notación de Lagrange

$D_{x^2}y$ o $D_{x^2}f(x)$ Notación de Cauchy

$\ddot{y}$ Notación de Newton

Si la segunda derivada es una función derivable, al derivarla se obtiene la tercera derivada de la función, que se representa con:

$$\frac{d^3y}{dx^3} \;\; o \;\; \frac{d^3}{dx^3}f(x); \quad y''' = f'''(x); \quad D_{x^3}y \;\; o \;\; D_{x^3}f(x); \quad \dddot{y}$$

Si todas las derivadas sucesivas hasta la de orden n-1 son derivables, la enésima (o de orden n) derivada de $f(x)$ se obtiene como:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}f(x) = \frac{d}{dx}\left[f^{(n-1)}(x)\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$$

Las notaciones que se emplean para la derivada de orden *n* de la función $y = f(x)$ son:

$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n}f(x)$ Notación de Leibniz

$y^n = f^{(n)}(x)$ Notación de Lagrange

$D_{x^n}y = f^{(n)}(x)$ Notación de Cauchy

En la notación de Lagrange se emplea un número romano cuando el orden es mayor que 3 y la notación de Newton no se emplea para derivadas sucesivas después de la tercera.

Ejemplo:

Derivadas de orden superior de funciones implícitas.

También es posible obtener derivadas de orden superior de funciones implícitas. En algunos casos debe aplicarse la regla de la cadena.

Ejemplo:

Derivadas de orden superior de funciones paramétricas.

En cuanto a la segunda derivada de una función paramétrica se utiliza la siguiente fórmula:

$$\frac{d^2y}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

En forma general, la expresión para obtener la derivada enésima de una función definida en forma paramétrica es:

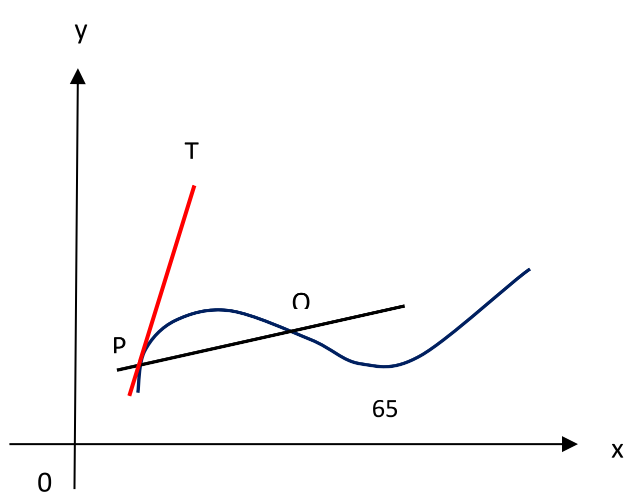
$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

4.8 Aplicaciones geométricas de la derivada: dirección de una curva, ecuaciones de la recta tangente y la recta normal, ángulo de intersección entre curvas.

Dirección de una curva (pendiente de la tangente)

Considérese una curva continua y un punto fijo P en ella. La recta que pasa por el punto P y corta la curva en otro punto Q se llama secante de la curva.

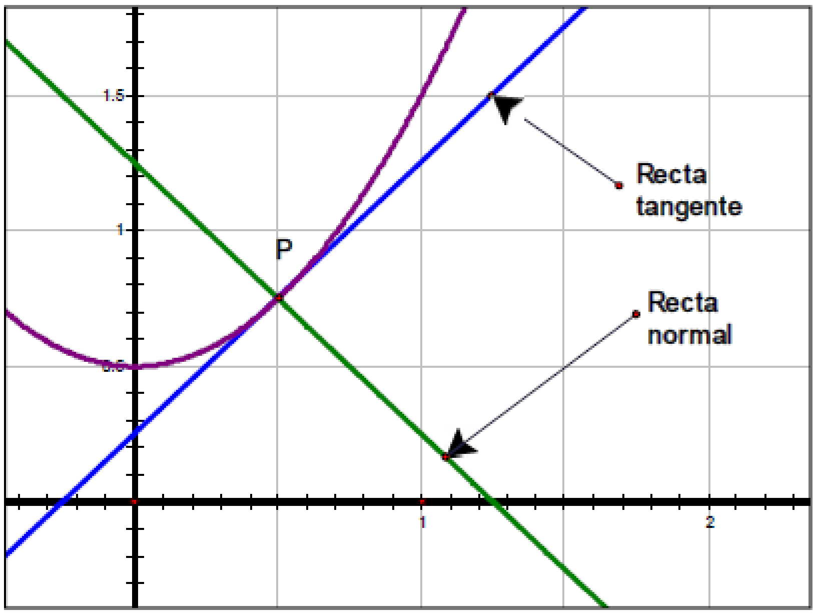
Si se mueve el punto Q sobre la curva acercándose al punto P, la secante gira alrededor de P y tiende a una posición límite que es la de la recta PT. Gráficamente:



Se considera que la curva PT es el límite de la secante PQ y se define como la tangente a la curva en el punto P.

Recordar que la derivada de una función $f(x)$ en un punto, es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.

Ecuaciones de la recta tangente y la recta normal



Sea una curva C de ecuación $y = f(x)$, donde $f(x)$ es una función continua.

La pendiente de la tangente a la curva C en el punto $P(x_0, y_0)$ es $m = f'(x_0)$

La ecuación de dicha tangente puede escribirse usando la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Se define como normal a una curva en un punto, a la recta que pasa por dicho punto y es perpendicular a la tangente a la curva en el mismo.

Como la condición de perpendicularidad de dos rectas es que sus pendientes sean recíprocas y de signo contrario, la pendiente m_N de la normal es:

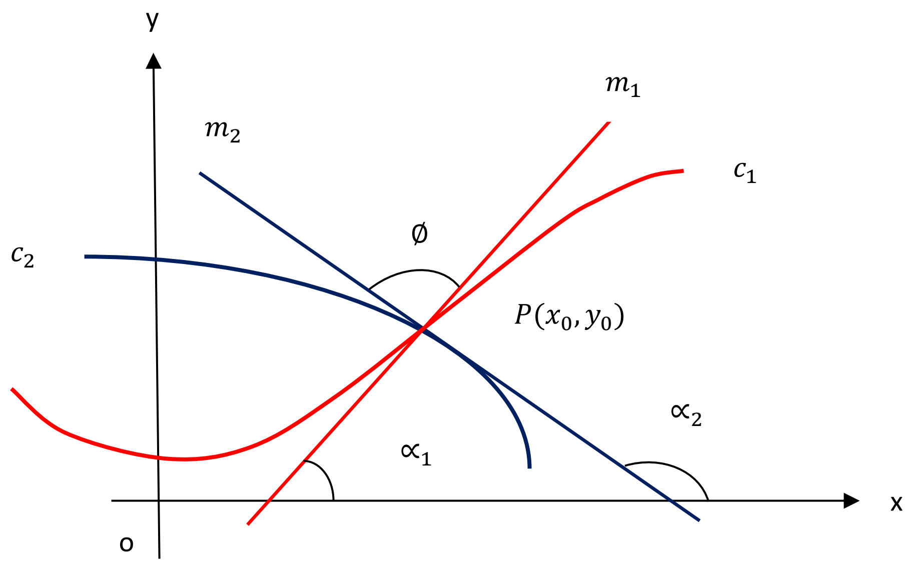
$$m_N = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

por lo cual la ecuación de dicha normal es:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Ángulo de intersección entre curvas.

Es el ángulo que forman las tangentes a las curvas C1 y C2 al cortarse en el punto $P(x_0, y_0)$. Gráficamente:



De acuerdo a la figura: $\emptyset = \alpha_2 - \alpha_1$

por lo que: $\emptyset = ang \tan f'_2(x_0) - ang\ tan f'_1(x_0)$

Otra forma de obtener ∅ es mediante la fórmula:

$$tan\emptyset = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = \frac{f'_2(x_0) - f'_1(x_0)}{1 + f'_2(x_0) f'_1(x_0)}$$

Metodología:

1.- Se deberá hallar el punto de intersección entre las curvas.

2.- Se calcularán las derivadas de cada una de las curvas

3.- Con la derivada de las curvas, se encuentra la pendiente de cada una de éstas en el punto de intersección P.

4.- Se aplicará la fórmula $\emptyset = ang\ tan \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$

4.9 Aplicación física de la derivada como razón de cambio de variables relacionadas.

Se debe recordar que físicamente la derivada representa una razón de cambio instantáneo.

Si en un problema intervienen variables relacionadas, es decir aquellos que usualmente presentan una relación entre por lo menos dos variables y se requiere conocer la razón (derivada) de una variable cuando la razón de otra variable es conocida.

Para resolver problemas de este tipo se sugieren los siguientes pasos:

1. Enlistar los datos y las magnitudes que se buscan
2. Trazar una figura que represente el enunciado del problema y donde se establezca la convención que indique con qué letra se está representando cada variable involucrada.
3. Escribir la relación que ligue a las variables que intervienen.
4. Derivar con respecto a la variable independiente.
5. Sustituir en el resultado del paso anterior las magnitudes incluidas en los datos y despejar las que se buscan.

Según el caso, pueden combinarse entre sí estos pasos sugeridos.

4.10 Conceptos de función diferenciable y de diferencial e interpretación geométrica. La derivada como cociente de diferenciales.

Conceptos de función diferenciable y de diferencial

Una función $y = f(x)$ es diferenciable para un valor de x si para un incremento Δx, el incremento Δy puede escribirse de la siguiente forma:

$\Delta y = f'(x)\Delta x + \eta\Delta x$ donde $\eta \to 0\ cuando\ \Delta x \to 0$

El término $f'(x)\Delta x$ se llama la parte principal del incremento de Δy. Por otra parte, que $\eta \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ significa que $\lim_{\Delta x \to 0} \eta = 0$

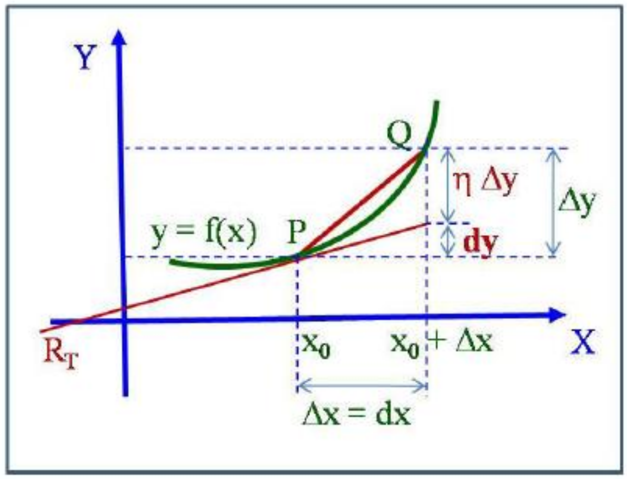
La existencia de la derivada es condición necesaria y suficiente para que la función sea diferenciable.

Se llama diferencial de una función en un punto x a la parte principal del incremento de la función diferenciable y se representa con:

$$dy = df(x) = f'(x)\,\Delta x \text{ siempre que } \Delta x = dx \text{ entonces } dy = f'(x)dx$$

Donde dy es diferencial de y y dx es diferencial de x.

Interpretación Geométrica.



La diferencial dy es el incremento de la ordenada de la tangente T y Δy es el incremento de la ordenada de la curva C.

Se observa que el incremento Δy es diferente a la diferencial dy. La diferencia entre éstos depende de cuánto se separe la curva de su tangente.

También se observa que dy se aproxima más a Δy a medida que Δx se hace más pequeño.

$\Delta y \neq dy$ ya que $\Delta y = dy + \eta\Delta x$, pero como $\eta \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ entonces $dy \approx Dy$; donde dy es una buena aproximación de Δy cuando $\Delta x \to 0$ o es un valor muy pequeño.

Para obtener dy solo se necesita multiplicar a $f'(x)$ por dx.

La derivada como cociente de diferenciales.

Como se vio previamente, la diferencial de una función está dada por $dy = f'(x)\Delta x$, pero como el incremento de la variable independiente Δx es igual a su diferencial dx, entonces $dy = f'(x)dx$, de donde $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, por lo que la derivada de una función es igual al cociente de la variable dependiente entre la diferencial de la variable independiente.

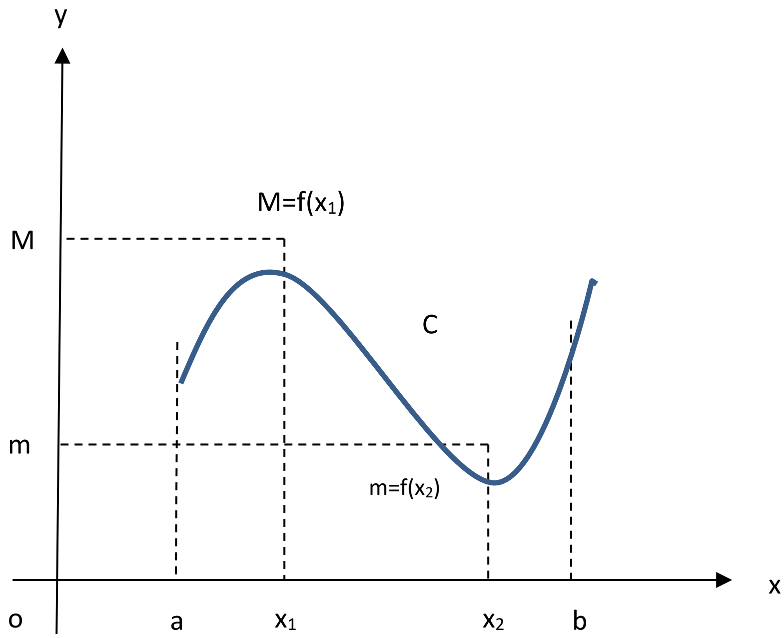
5. Variación de funciones.

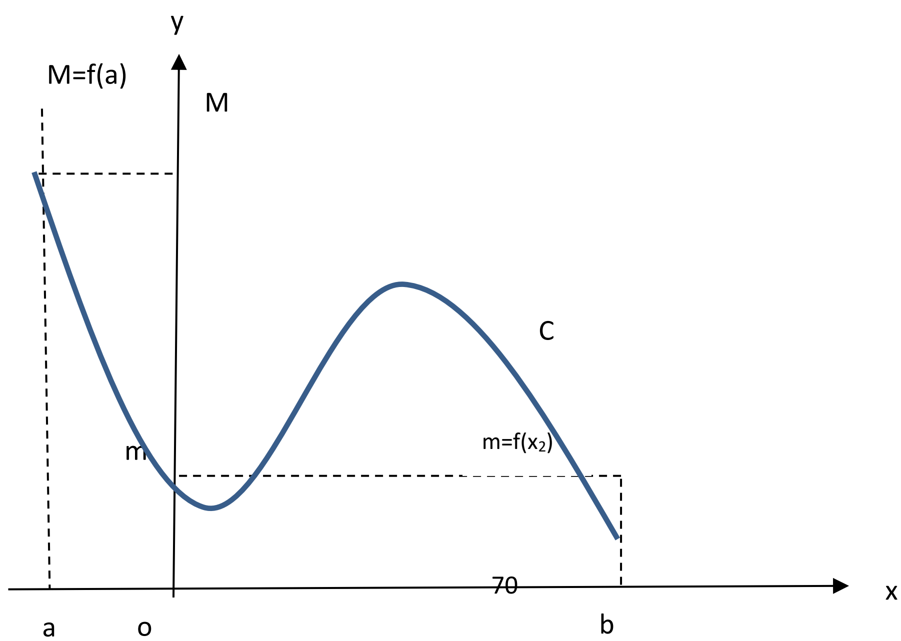
5.1 Enunciado e interpretación geométrica de los teoremas Weierstrass y de Bolzano.

Teorema Weierstrass

Si la función $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces entre todos los valores de $f(x)$ en ese intervalo, existe un valor $M = f(x_1)$ llamado máximo absoluto, que no es superado por ningún otro valor de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ y un valor $m = f(x_2)$ llamado mínimo absoluto, que no supera a ninguno de los valores de $f(x)$ en el intervalo. Esto es:

$$m = f(x_2) \leq f(x) \leq f(x_1) = M$$

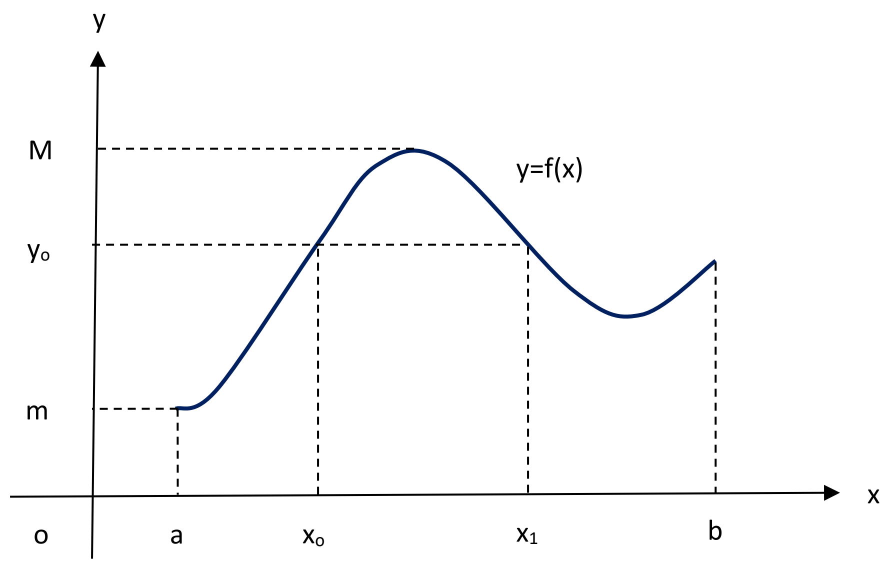




Para el caso particular de la función constante y = k, se tiene que M = m = k.

Teorema de Bolzano:

Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea y_0 de $f(x)$ tal que $m \leq y_0 \leq M$. Entonces, cuando menos para un valor x_0 de x en el intervalo $[a, b]$ se tiene que $y_0 = f(x_0)$



5.2 Enunciado, demostración e interpretación geométrica del teorema de Rolle.

Sea $y = f(x)$ una función que cumple con las siguientes condiciones:

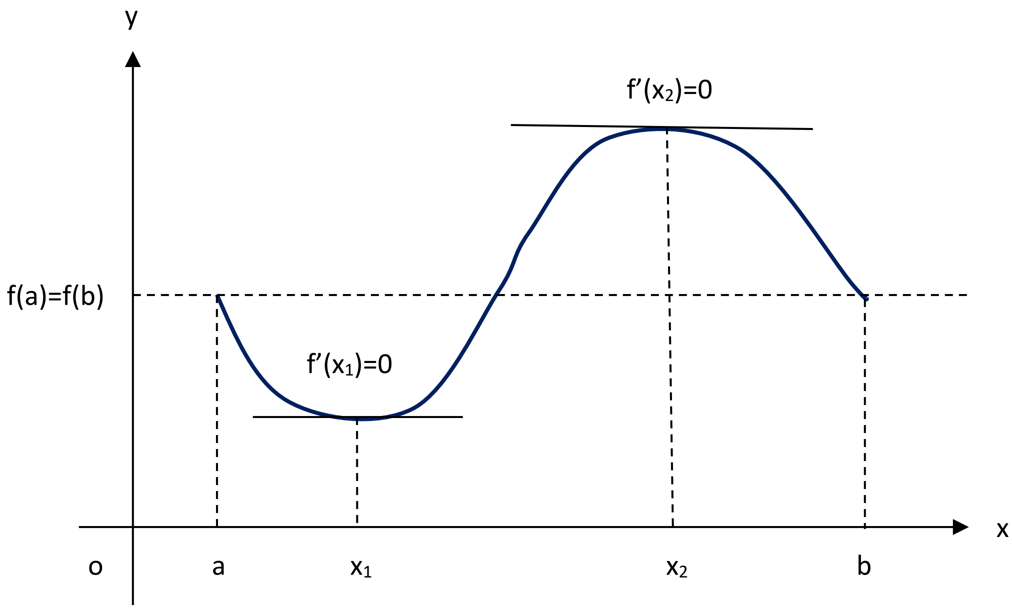
1. $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
2. $y = f(x)$ es derivable en el intervalo abierto (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

Entonces existe por lo menos un valor $x_1 \in (a, b)$ para el cual $f'(x_1) = 0$

Interpretación geométrica del teorema de Rolle.

El teorema indica que existe por lo menos un punto de la gráfica de $y = f(x)$ en el intervalo (a, b) en donde la recta tangente a ella es paralela al eje de las abscisas, es decir, de pendiente cero.

Gráficamente:



5.3 Demostración e interpretación geométrica del teorema del valor medio del cálculo diferencial.

Sea $y = f(x)$ una función que cumple con las siguientes condiciones:

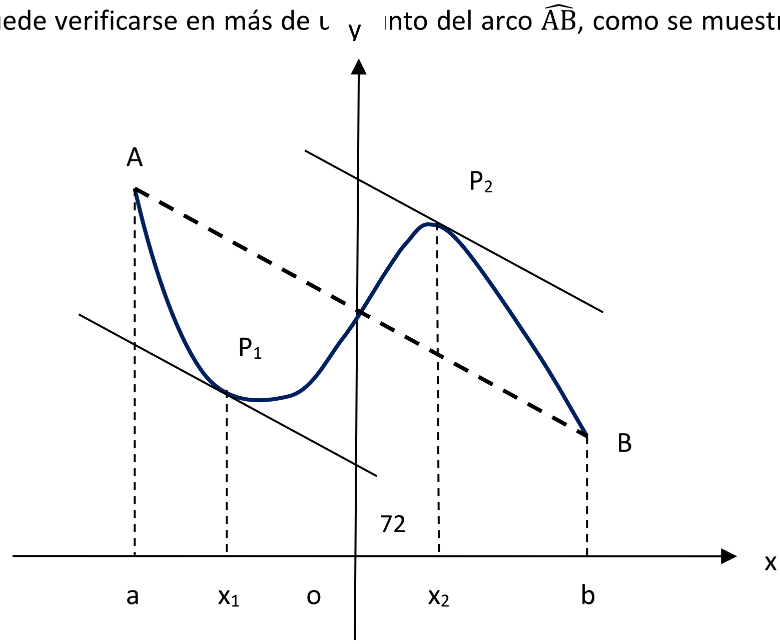
1. $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
2. $y = f(x)$ es derivable en el intervalo abierto (a, b).

Entonces existe por lo menos un valor x en (a, b) para el cual $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Interpretación geométrica:

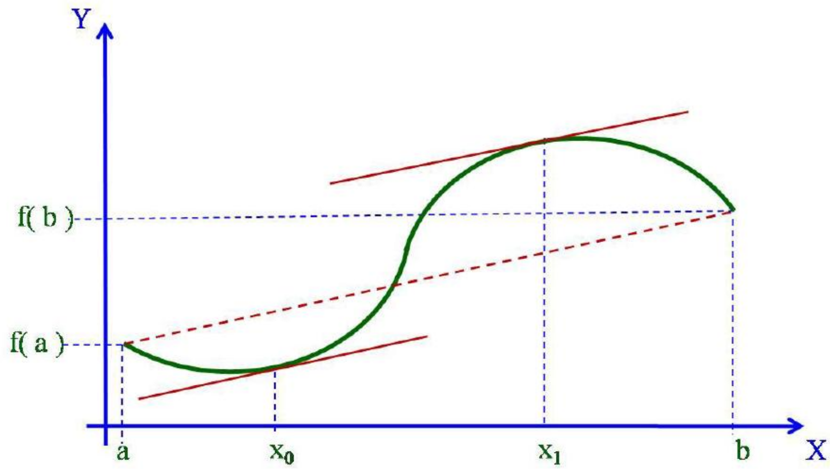
El teorema establece que existe cuando menos un punto $P_1(x_1, y_1)$ de la curva entre los puntos A y B en el cual la recta tangente es paralela a la secante que pasa por los puntos A y B.

Este teorema puede verificarse en más de un punto del arco $\widehat{AB}$, como se muestra en la siguiente figura:



Corolario 1.- Una función $y = f(x)$ cuya derivada es nula en un intervalo, es necesariamente una función constante.

Corolario 2.- Si dos funciones $y = f_1(x)$ y $y = f_2(x)$ tienen sus derivadas iguales en un intervalo, difieren en una constante en dicho intervalo, $f_1(x) = f_2(x) + C$



5.4 Funciones crecientes y decrecientes y su relación con el signo de la derivada.

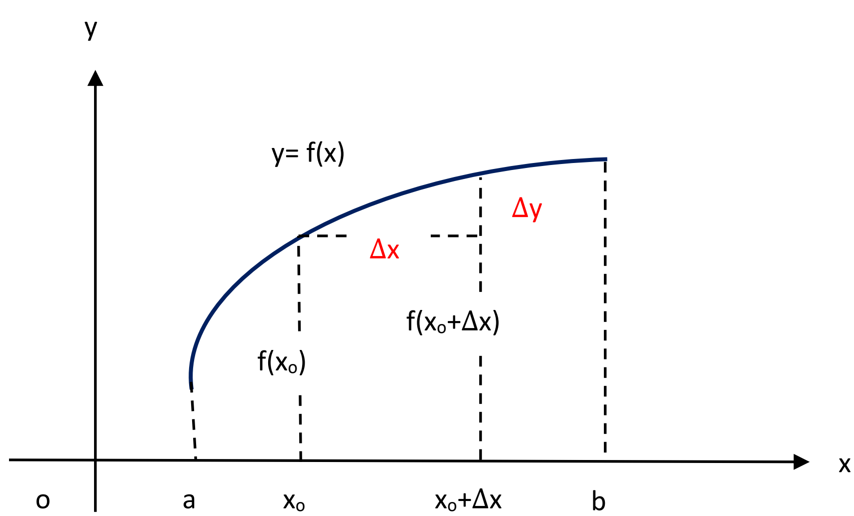
Una función se llama creciente cuando en su gráfica, al crecer x también crece y.

Una función $y = f(x)$ es creciente en un intervalo cerrado $[a, b]$ si el cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es positivo en el intervalo. Es decir, si

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} > 0$$

siendo x_o y $x_o + \Delta x$ dos valores cualesquiera de x en $[a, b]$.

Observar que $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \leftrightarrow \Delta x > 0,\ \Delta y > 0,$ o bien que $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \leftrightarrow \Delta x < 0,\ \Delta y < 0$



La pendiente de cualquier tangente en este intervalo es positiva.

Una función se llama decreciente cuando en su gráfica al crecer x decrece y.

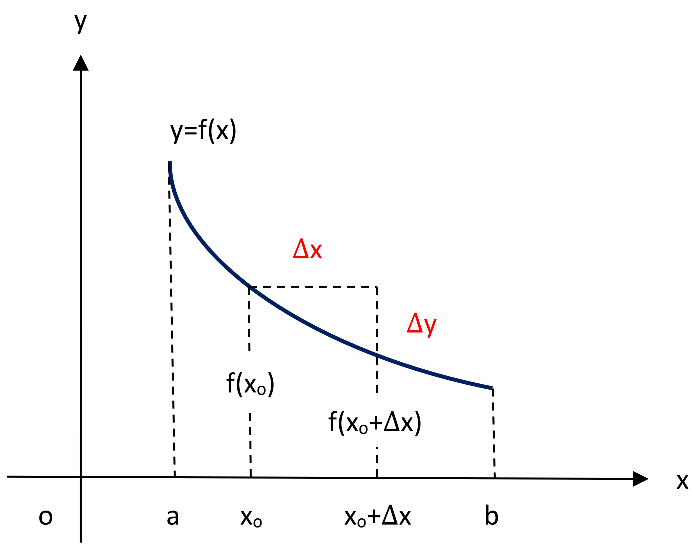
Una función $y = f(x)$ es decreciente en un intervalo $[a, b]$ si el cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es negativo en el intervalo. Esto es, si

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} < 0$$

siendo x_o y $x_o + \Delta x$ dos valores cualesquiera de x en $[a, b]$.

Se observa que $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0 \leftrightarrow \Delta x > 0,\ \Delta y < 0,$ o bien que $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0 \leftrightarrow \Delta x < 0,\ \Delta y > 0$

La pendiente de cualquier recta tangente en este intervalo es negativa.



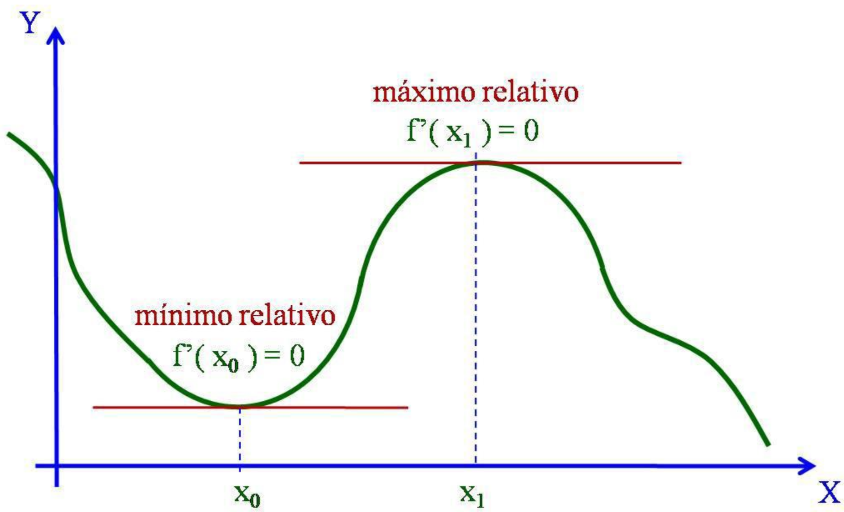
Para condicionar analíticamente la existencia de una función creciente o de una decreciente, se presentan los siguientes teoremas:

- Sea $y = f(x)$ una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b), y tal que $f´(x) > 0$ en (a, b). Entonces la función es creciente en $[a, b]$.
- Sea $y = f(x)$ una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b), y tal que $f´(x) < 0$ en (a, b). Entonces la función es decreciente en $[a, b]$.

5.5 Máximos y mínimos relativos. Criterio de primera derivada. Concavidad y puntos de inflexión. Criterio de la segunda derivada. Problemas de aplicación.

Máximos y mínimos relativos.

Los extremos relativos son los valores máximo o mínimo que la función toma con respecto de un cierto intervalo. En general se encuentran cuando al valuar la derivada de la función en cierto punto, ésta da como resultado 0, lo que indica que la pendiente de la recta tangente en ese punto es horizontal.



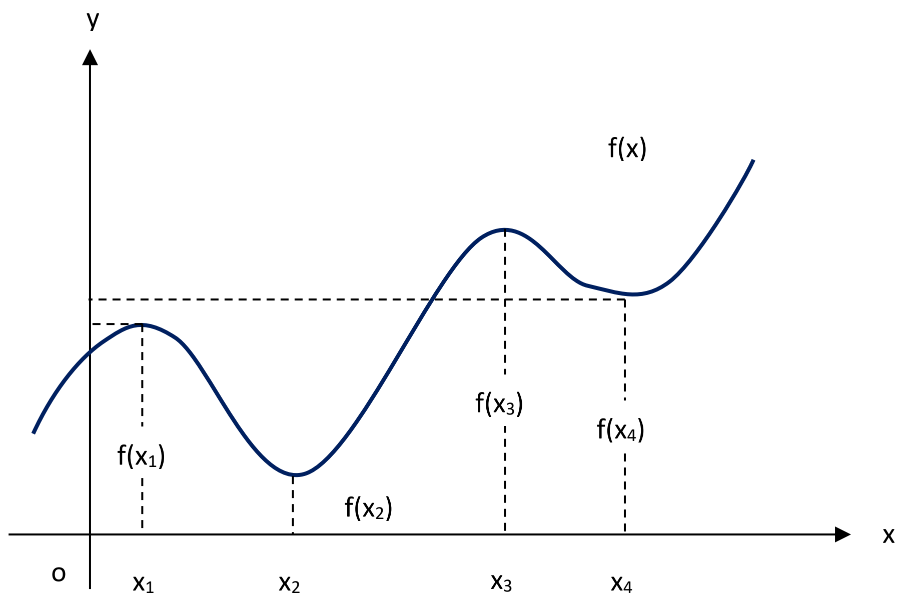
Una manera de reconocer los máximos y mínimos es revisando la tendencia que trae la curva momentos antes de llegar a la tangente horizontal:

- Si la curva viene creciendo, se tiene un máximo relativo
- Si la curva viene decreciendo, se tiene un mínimo relativo.

$f(x_0)$ es un valor máximo relativo de la función continua $y = f(x)$, si existe un entorno para el cual $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$

$f(x_0)$ es un valor mínimo relativo de la función continua $y = f(x)$, si existe un entorno para el cual $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$

Una misma función puede tener más de un máximo relativo y más de un mínimo relativo y aún puede suceder que un máximo relativo sea menor que un mínimo relativo.

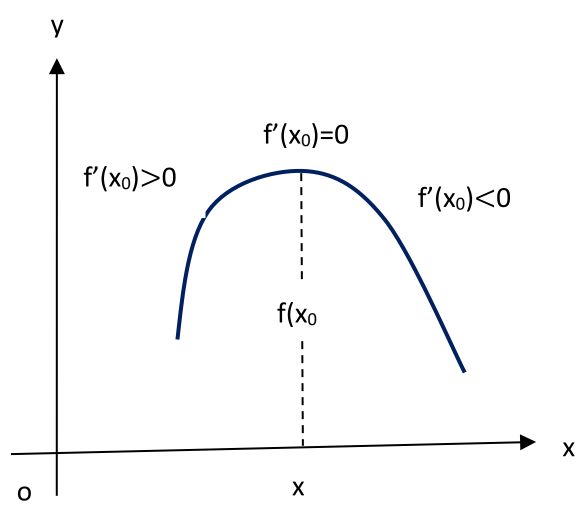


TEOREMA

Sea la función continua $y = f(x)$ y un entorno del valor x_0 para el cual se tiene que:

$f'(x_0 + \Delta x) > 0$ si $\Delta x < 0$ y $f'(x_0 + \Delta x) < 0$ si $\Delta x > 0$

Entonces, $f(x_0)$ es un valor máximo relativo de la función $f(x)$.

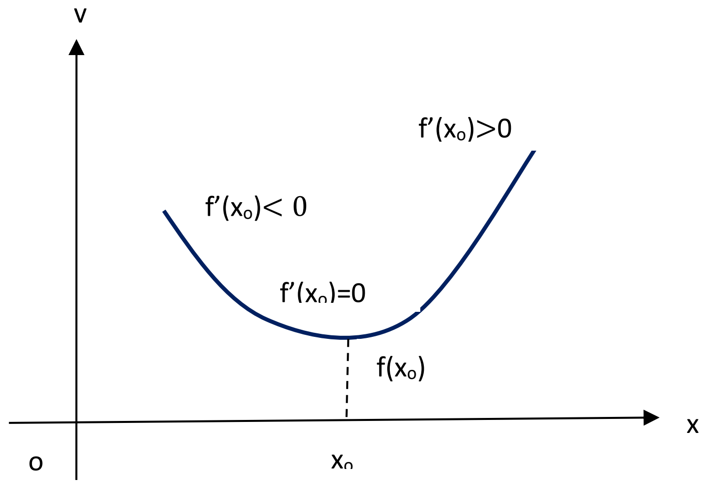


TEOREMA

Sea la función continua $y = f(x)$ y un entorno del valor x_0 en el cual se tiene que:

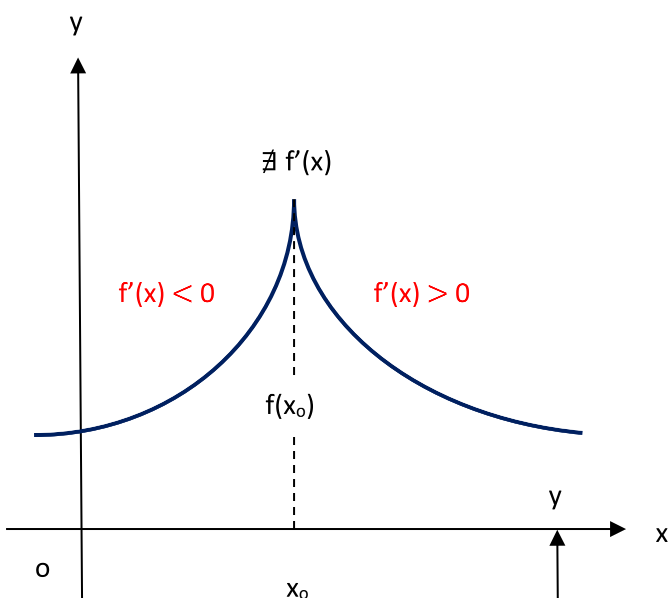
$f'(x_0 + \Delta x) < 0$ si $\Delta x < 0$ y $f'(x_0 + \Delta x) > 0$ si $\Delta x > 0$

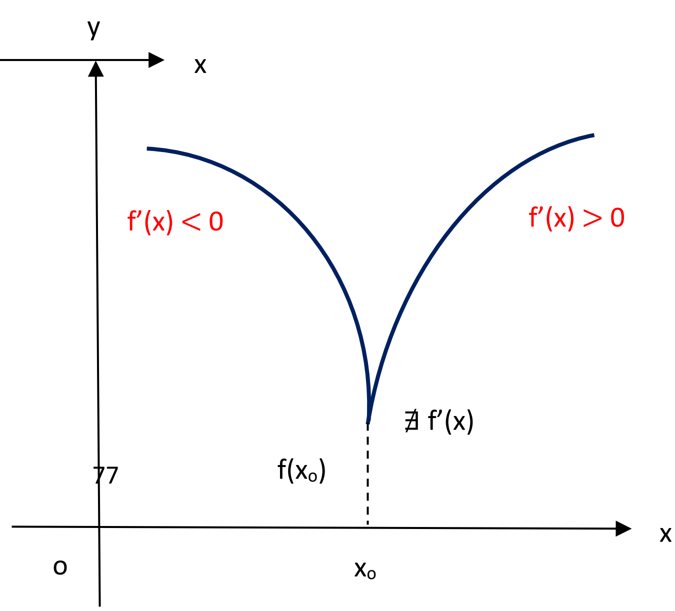
Entonces, $f(x_0)$ es un valor mínimo relativo de la función $f(x)$.



Si el cambio de signo de la derivada $f'(x)$ es de (+) a (-) se trata de un máximo relativo; si es de (-) a (+) se tiene un mínimo relativo.

La derivada puede cambiar de signo pasando por el valor cero o cambiando bruscamente de un valor positivo a uno negativo o viceversa.





Para determinar los máximos y mínimos relativos de una función se utiliza el siguiente criterio.

Criterio de primera derivada

1. Obtener la derivada $f´(x)$.
2. Determinar los valores de x que anulan o hacen discontinua a la derivada. Estos valores comúnmente se conocen como valores críticos de x.
3. Investigar el cambio de signo de la derivada para cada valor crítico de x, deduciendo si se trata de un máximo relativo o de un mínimo relativo según sea el cambio de (+) a (-) o de (-) a (+), respectivamente.

Nota.- Si la derivada no cambia de signo en un punto, la función $f(x)$ no tiene máximo ni mínimo relativo.

Otra forma de analizar una función para máximos y mínimos relativos incluye la utilización de la segunda derivada de la función, como se indica en los siguientes teoremas:

Si la función $f(x)$ es derivable en x_0 además $f´(x_0) = 0$ y $f´´(x_0) < 0$, entonces $f(x)$ presenta un máximo relativo para $x = x_0$.

Si la función $f(x)$ es derivable en x_0, además $f´(x_0) = 0$ y $f´´(x_0) > 0$, entonces $f(x)$ tiene un mínimo relativo para $x = x_0$.

Con base en los teoremas anteriores se presenta el siguiente:

Criterio de la segunda derivada

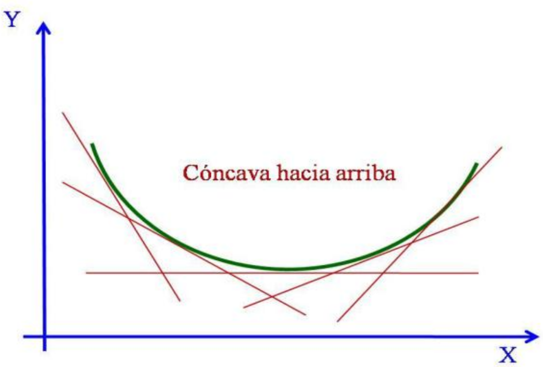
1. Obtener la primera y segunda derivadas de la función.
2. Determinar los valores críticos que anulan la primera derivada.
3. Calcular el valor de la segunda derivada para cada uno de los valores críticos obtenidos, deduciendo que si para un valor crítico $x = x_0$ se tiene que $f´(x_0) = 0$, entonces $f(x_0)$ es máximo relativo si $f´´(x_0) < 0$, y es mínimo relativo si $f´´(x_0) > 0$.

En el caso en que $f´(x_0) = 0$ ó $f´´(x_0)$ no exista, este criterio no es aplicable, teniéndose el recurso de aplicar el criterio de la primera derivada.

Concavidad y puntos de inflexión.

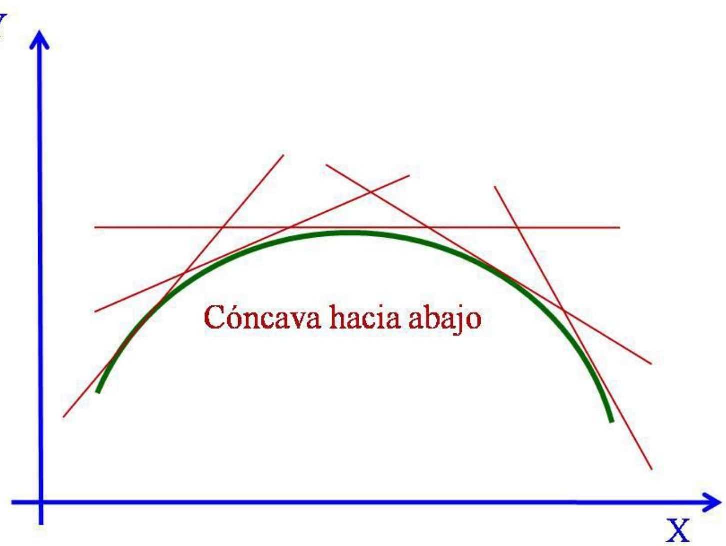
La concavidad de una curva es hacia donde tiende a cerrarse la curva, es decir, hacia donde se flexiona. La concavidad puede ser hacia arriba o hacia abajo con respecto al eje X.

La curva $y = f(x)$ que es continua en el punto $P(x_0, y_0)$ es cóncava hacia arriba en el punto P si existe un entorno de P en el cual todos los puntos de la curva, excepto el punto P se encuentran en la región superior de la tangente a la misma en P.



Si la ecuación de la curva es $y = f(x)$, tiene segunda derivada y se cumple que $f''(x) > 0$, entonces la curva es cóncava hacia arriba en el punto $P(x_0, y_0)$.

La curva $y = f(x)$ que es continua en el punto $P(x_0, y_0)$ es cóncava hacia abajo en este punto P si existe un entorno de P en el cual todos los puntos de la curva, con excepción del punto P, se encuentran en la región inferior de la tangente a la curva en dicho punto.

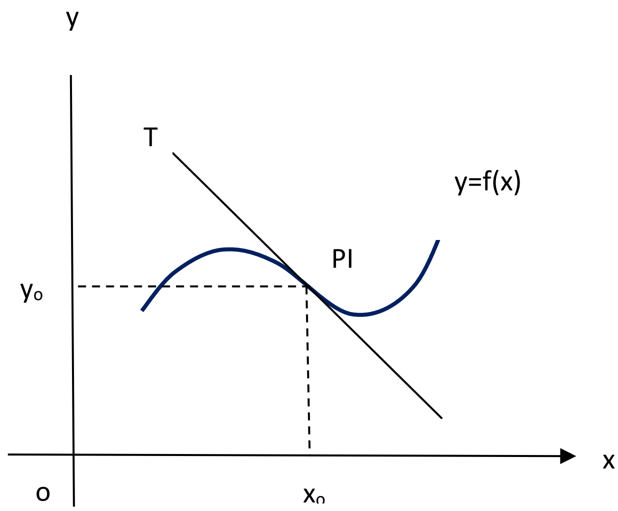


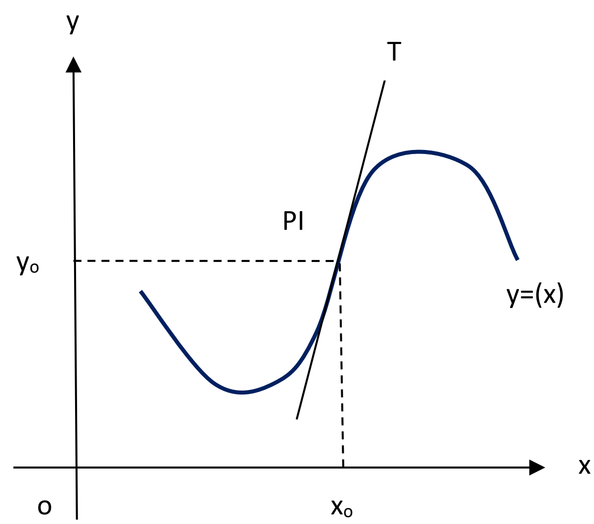
Si la curva tiene ecuación $y = f(x)$, esta función tiene segunda derivada y se cumple que

$f''(x) < 0$, entonces la curva tiene su concavidad hacia abajo en el punto $P(x_0, y_0)$.

Puntos de inflexión

El punto de inflexión de una curva es aquel en el cual cambia el sentido de la concavidad de la misma.





En el punto de inflexión la segunda derivada cambia de signo.

Para encontrar los puntos de inflexión de una curva $y = f(x)$ se siguen los siguientes pasos:

1.- Calcular la segunda derivada $f''(x)$.

2.- Determinar los valores que anulen o hagan discontinua a $f''(x)$.

3.- Si al pasar x por dichos valores hay un cambio de signo de $f''(x)$, entonces la curva tiene un punto de inflexión para el valor de x considerado.

4.- Si el cambio de signo es de (+) a (-), la curva cambia su concavidad de hacia arriba a hacia abajo.

5.- Si el cambio es de (-) a (+), la concavidad cambia de hacia abajo a hacia arriba.

Otra forma más rápida de calcular un punto de inflexión se infiere del siguiente teorema:

Sea $y = f(x)$ la ecuación de una curva, para $x = x_0$ se tiene que $f''(x) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$, entonces el punto $P(x_0, y_0)$ de la curva es un punto de inflexión.

Problemas de aplicación

No hay regla aplicable en la solución de problemas de máximos y mínimos, pero en la mayoría de ellos puede seguirse el siguiente orden:

1. Determinar la función cuyo máximo o mínimo se desea obtener, trazando un croquis cuando convenga.
2. Si la expresión resultante contiene más de una variable, las condiciones del problema proporcionarán suficientes relaciones entre las variables para que la función pueda expresarse en términos de una sola variable.
3. A la función resultante se le aplican los criterios vistos anteriormente para el cálculo de máximos y mínimos.
4. En los problemas prácticos, muchas veces se ve con facilidad cuáles de los valores críticos darán un máximo o un mínimo, por lo que no siempre es necesario aplicar completo el paso anterior.
5. Conviene construir la gráfica de la función para comprobar el resultado obtenido

5.6 Análisis de la variación de una función.

Con los conceptos vistos en este capítulo, se tienen elementos para determinar:

1. Intervalos de la función donde es creciente o decreciente.
2. Máximos y mínimos relativos y absolutos.
3. Concavidad y puntos de inflexión en la gráfica.

Se tiene un panorama del comportamiento de la función a lo largo de su dominio.

Para el análisis de la variación de una función es recomendable primero establecer los puntos críticos de la función, resumiendo son:

- Donde la función, la primera o la segunda derivada no existan.
- Donde la función tenga cambios de regla de correspondencia
- Donde la primera o la segunda derivada valgan cero

Una vez establecidos todos los puntos críticos, se ordenan del menor al mayor y se acomoda en una tabla como la siguiente, con intervalos de análisis entre ellos:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusión
$(-\infty, x_1)$				
x_1				
(x_1, x_2)				
x_2				
(x_2, ∞)				

De las conclusiones anteriores, se tiene el comportamiento de la gráfica, intervalo a intervalo, hasta armar el total de su desarrollo.

6. Álgebra vectorial.

6.1 Cantidades escalares y vectoriales. Definición de segmento dirigido. Componentes escalares.

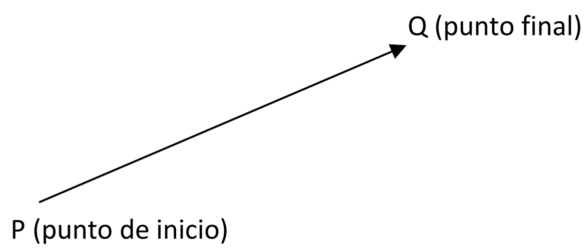
Cantidades escalares y vectoriales.

Se denominan cantidades escalares a aquellas en las que las medidas quedan correctamente expresadas por medio de un número y su correspondiente unidad, como masa, temperatura, presión y densidad.

También es frecuente encontrarse con cantidades que poseen magnitud y dirección, como la fuerza, la velocidad, la aceleración, el desplazamiento, etc. A este tipo de cantidades se les denomina cantidades vectoriales o vectores.

Definición de segmento dirigido.

Para representar geométricamente a un vector se utiliza el segmento dirigido, el cual es un segmento de recta entre dos puntos al que se le asigna un sentido, con un punto de inicio y un punto final.



Los segmentos dirigidos presentan las características de un vector: dirección, dada por la dirección de la recta, el sentido de recorrido (flecha) y magnitud, dada por la longitud del segmento.

Por lo general se usan letras minúsculas con una testa para designar a los vectores: $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ etc.

Componentes escalares

El origen de cualquier vector se puede hacer coincidir con el correspondiente sistema coordenado rectangular, con lo cual es factible establecer una descripción de un vector en forma exclusivamente numérica.

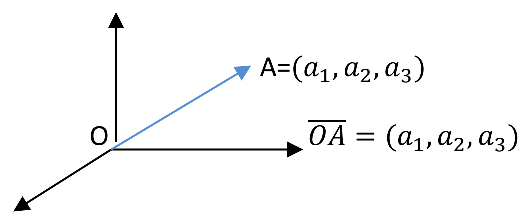
Considerando un vector $\bar{a}$ representado gráficamente por un segmento dirigido cuyo punto inicial se encuentra en el origen y con punto final $A(a_1, a_2, a_3)$. A los tres números reales, a_1, a_2, a_3 se les denomina las componentes escalares del segmento dirigido $\overline{OA}$ sobre los ejes coordenados.

6.2 Concepto de vector como terna ordenada de números reales, módulo de un vector, igualdad entre vectores, vector nulo y unitario, vectores unitarios ***i, j, k.***

Concepto de vector como terna ordenada de números reales.

Dado el segmento $\overline{OA}$ que representa gráficamente al vector $\bar{a}$, se dice que estos números son las componentes de dicho vector y de esta forma el vector $\bar{a}$ se expresa como: $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, donde a_1 es la componente en X, a_2 la componente en Y, y a_3 es la componente en Z.

El vector de posición del punto A, sus componentes son: $\bar{a} = \overline{OA} = (a_1 - 0, a_2 - 0, a_3 - 0) = (a_1, a_2, a_3)$, como se puede observar, las componentes del vector de posición son siempre iguales a las coordenadas del punto. A cada punto del espacio de tres dimensiones le corresponde un vector de posición y viceversa.



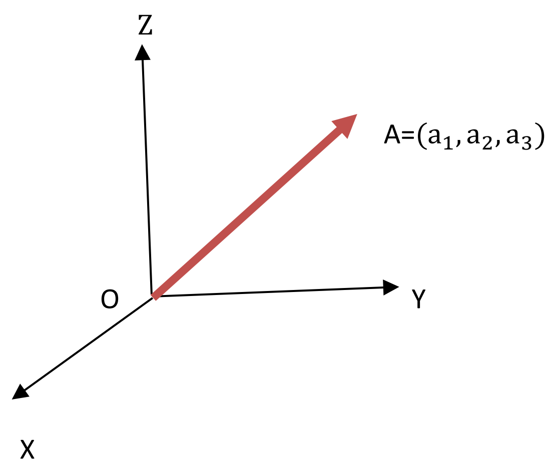
Si se considera ahora a un vector $\bar{b}$ representado geométricamente por el segmento dirigido $\overline{RS}$, las coordenadas de R y S son respectivamente $(r_1, r_2, r_3) y\ (s_1, s_2, s_3)$ entonces dicho vector tiene por componente a $\bar{b} = (s_1 - r_1, s_2 - r_2, s_3 - r_3)$.

Un vector libre queda caracterizado por su módulo, dirección y sentido. Este vector es independiente del lugar en el que se encuentra. Cada vector fijo es un vector libre.

Módulo de un vector

El modulo es la magnitud del vector. El símbolo $|\bar{a}|$ se utiliza para denotar el módulo del vector $\bar{a}$.

Para deducir la expresión que calcula el módulo de un vector a partir de sus componentes, se usa la siguiente figura:



De un primer triángulo rectángulo $\sqrt{\mathrm{a}_1^2+\mathrm{a}_2^2}$; por lo que $OA = |\bar{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

Por lo tanto el módulo del vector es: $|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

Igualdad entre vectores

Se puede establecer que si dos vectores son iguales, tienen las mismas componentes; e inversamente, dos vectores con las mismas componentes son necesariamente iguales en magnitud y dirección. Un vector queda completamente determinado, especificando, en forma ordenada, los tres números reales que constituyen sus componentes.

Una ecuación vectorial $\bar{a} = \bar{b}$ donde $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)\ y\ \bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, es una forma de representar las siguientes tres igualdades entre números reales.

$$a_1 = b_1,\ \ a_2 = b_2,\quad a_3 = b_3$$

Se dice que dos vectores son iguales si sus respectivos segmentos dirigidos tienen la misma magnitud y dirección.

Vector nulo y unitario

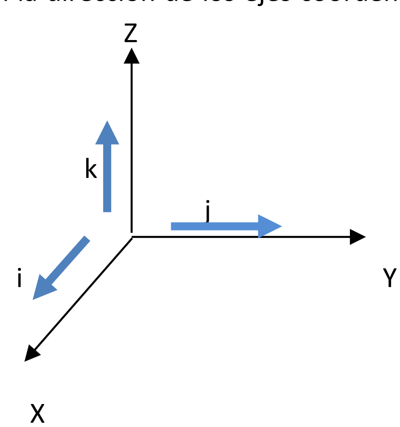
Un vector nulo es un vector cuyas componentes son cero, esto es: $\bar{0} = (0,0,0)$. Este vector tiene módulo cero, por eso se llama vector nulo, pero no se le asigna ninguna dirección en particular. Geométricamente puede ser considerado como un segmento dirigido para el cual punto inicial y el punto final son coincidentes, es decir, son el mismo punto.

Un vector es unitario cuando su módulo es igual a la unidad. Para cualquier vector diferente de cero, siempre es posible determinar el vector unitario en su misma dirección. Así la expresión para obtener un vector unitario en el espacio de tres dimensiones es:

$$\bar{a}_u = \left(\frac{a_1}{|\bar{a}|}, \frac{a_2}{|\bar{a}|}, \frac{a_3}{|\bar{a}|}\right) = \frac{1}{|\bar{a}|}(a_1, a_2, a_3)$$

*Vectores unitarios **i, j, k.***

Los vectores unitarios ***i, j, k***, tienen la dirección de los ejes coordenados y su módulo es igual a 1.



A los vectores unitarios no se acostumbra testarlos.

En términos de sus componentes, los vectores unitarios quedan expresados como:

$$i = (1,0,0), \quad j = (0,1,0), \qquad k = (0,0,1)$$

Así entonces el vector $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) = (a_1, 0,0) + (0, a_2, 0) + (0,0, a_3)$

$$\bar{a} = a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1)$$

$\bar{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ que es una combinación lineal de vectores unitarios.

Esta expresión define al vector $\bar{a}$ en su forma trinómica. Así la forma trinómica del vector

$\bar{q} = (4, -10, 9)\ es\ \bar{q} = 4i - 10j + 9k$. Ambas notaciones son equivalentes.

6.3 Operaciones con vectores: Adición de vectores, sustracción de vectores.

Adición de vectores.

Dados dos vectores en el espacio de n dimensiones,

$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)\ y\ \bar{b} = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$, la suma $\bar{a} + \bar{b}$ es el vector que se obtiene sumando sus componentes correspondientes. Así se tiene:

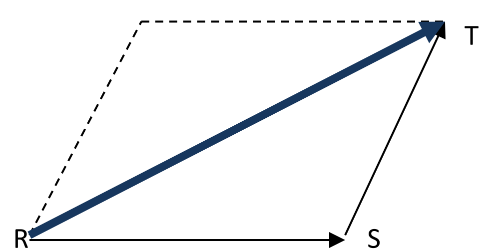
$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

Se llama suma al vector que resulta de aplicar la operación de adición entre los vectores $\bar{a}\ y\ \bar{b}$.

La adición de vectores en el espacio de tres dimensiones se puede interpretar geométricamente a partir del siguiente razonamiento.

El fenómeno de desplazamiento de un cuerpo se puede interpretar matemáticamente a través de vectores, así si un objeto se desplaza en una trayectoria recta de un punto R a un punto S, esto queda representado por el segmento $\overline{RS}$. Si posteriormente el mismo objeto se mueve en línea recta desde el punto S al punto T, es desplazamiento es $\overline{ST}$. Entonces el desplazamiento total corresponde al que si se hubiera efectuado uno solo desde el punto R al T, por lo que el vector $\overline{RT}$ es la resultante de los desplazamientos $\overline{RS}$ y $\overline{ST}$.

En la siguiente figura se observa que $\overline{RT}$ es una diagonal del paralelogramo definido por $\overline{RS}$ y $\overline{ST}$.



Propiedades:

Cerradura. Si $\bar{a}\ y\ \bar{b}$ son dos vectores del espacio de n dimensiones, entonces $\bar{a}+\bar{b}$ también es un vector de n dimensiones.

Asociatividad. Se cumple que: $\bar{a}+\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=\left(\bar{a}+\bar{b}\right)+\bar{c}$

Existencia del elemento idéntico. Para la adición de vectores existe un elemento idéntico que es el vector cero, cuyas componentes son iguales a cero y designado por $\bar{0}=(0,0,0,\dots,0)$, y tiene la propiedad que: $\bar{a}+\bar{0}=\bar{0}+\bar{a}=\bar{a}$

Existencia de los inversos. Si se tiene un vector $\bar{a}$, su negativo es $-\bar{a}$, definido como $-\bar{a}=(-a_1,-a_2,\dots,-a_n)$. Entonces se cumple que: $\bar{a}+(-\bar{a})=(-\bar{a})+\bar{a}=\bar{0}$. Para cada vector siempre existe su inverso, tal que al sumarlos da como resultado el vector cero.

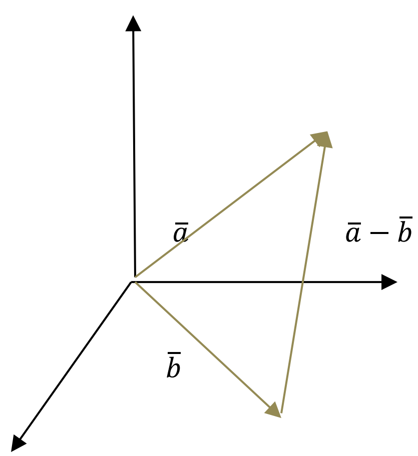
Conmutatividad. Se cumple que: $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$

Sustracción de vectores

La sustracción de vectores $\bar{a}-\bar{b}$ se puede definir a partir de la adición como:

$$\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+\left(-\bar{b}\right)=(a_1,a_2,\dots,a_n)+(-b_1,b_2,b_3\dots,b_n)=(a_1-b_1,a_2-b_2,\dots,a_n-b_n)$$

La interpretación geométrica de la sustracción de dos vectores, muestra que los vectores se consideran con origen común y la diferencia es el vector que va del extremo de $\bar{b}\ a\ \bar{a}$. Es decir se hace la adición de $\bar{b}+\left(\bar{a}-\bar{b}\right)=\bar{a}$



6.4 *Multiplicación de un vector por un escalar.*

Si λ es un número real (llamado comúnmente escalar) y $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3,\dots,a_n)$ es un vector en el espacio de n dimensiones, el producto $\lambda\bar{a}$ es el vector obtenido multiplicando cada componente de $\bar{a}$ por λ, es decir:

$\lambda\bar{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3\dots,\lambda a_n)$

Al multiplicar un vector por un escalar, da como resultado un vector del mismo espacio.

Si el escalar es mayor que uno, el resultado de la multiplicación será un vector con la misma dirección del vector, pero con módulo mayor que el del vector original.

Si el escalar es mayor que cero pero menor que uno, el resultado será un vector con la misma dirección pero con módulo menor.

Cuando el escalar es mayor que menos uno (-1), pero menor que cero se obtendrá un vector paralelo al vector original, pero con dirección opuesta y módulo menor.

Finalmente si el escalar es menor que menos uno, el resultado será un vector paralelo al vector inicial pero con dirección opuesta y módulo mayor.

Propiedades:

Si λ_1 y λ_2 son escalares y $\bar{a}\ y\ \bar{b}$ son vectores, se cumplen las siguientes propiedades:

$$\lambda_1\ (\bar{a}+\bar{b})= \lambda_1\bar{a}\ +\lambda_1\bar{b}$$

$$(\lambda_1+\lambda_2)\ \bar{a} =\lambda_1\bar{a}+\lambda_2\bar{a}$$

$$(\lambda_1\lambda_2)\ \bar{a}=\lambda_1(\lambda_2\bar{a})$$

$$|\lambda\bar{a}| = |\lambda||\bar{a}|$$

$$0\bar{a}=\bar{0},\quad 1\bar{a}=\bar{a},\quad (-1)\ \bar{a}=-\bar{a},\quad -\bar{0}=\bar{0}$$

6.5 Producto escalar y propiedades

El producto escalar de dos vectores en el espacio de n dimensiones

$\bar{a}=(a_1,a_2,a_3,\dots,a_n)$ y $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3,\dots,b_n)$ denotado por $\bar{a}\cdot\bar{b}$, es:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

El resultado del producto escalar de dos vectores es un escalar (número real). A este producto escalar también se le conoce como producto interno o producto punto.

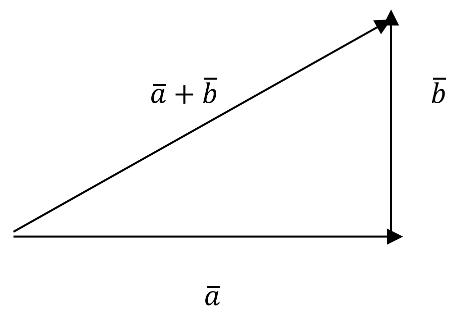
Propiedades.

Dados los vectores $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ en el espacio de n dimensiones y el escalar λ, el producto escalar cumple:

1) $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$
2) $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$
3) $(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}=\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b}),\ \ \lambda\ \in \mathrm{R}$
4) $\bar{a}\cdot\bar{a}>0\ \ si\ \ \bar{a}\neq\bar{0}$

6.6 Condición de perpendicularidad entre vectores

Dos vectores $\bar{a}\ y\ \bar{b}$ son ortogonales si y solo si $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$

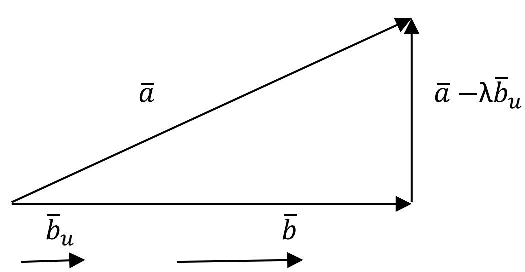


Geométricamente se establece que $\bar{a}\ y\ \bar{b}$ son perpendiculares (ortogonales) si y solo si en el triángulo descrito se cumple que:

$$|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 = |\bar{a} + \bar{b}|^2$$

En caso de que los vectores sean iguales a $\bar{0}$, entonces necesariamente se cumple que $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ En esta situación, el vector $\bar{0}$ no tiene una dirección definida; sin embargo se ha adoptado que el vector nulo es ortogonal a todo vector.

6.7 Componente escalar y vectorial de un vector en la dirección de otro.



La componente vectorial de un vector $\bar{a}$ sobre otro vector $\bar{b}$, que se simboliza $Comp.Vec._{\bar{b}}\ \bar{a}$, es un vector $\lambda \bar{b}_u$ en el cual $\bar{b}_u$ es un vector unitario en la dirección de $\bar{b}$, y λ es un escalar tal que $\bar{a} - \lambda \bar{b}_u$ es ortogonal a $\bar{b}$. Al escalar λ se le llama componente escalar de $\bar{a}$ sobre $\bar{b}$.

La componente vectorial de $\bar{a}$ sobre $\bar{b}$ está dada por la expresión:

$$Comp.Vec_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$$

El escalar λ, o sea la componente escalar de $\bar{a}$ sobre $\bar{b}$ está dada por la expresión:

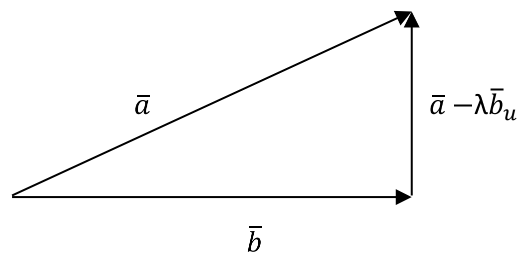
$$Comp.Esc._{\bar{b}}\ \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}$$

Además, el signo del producto escalar $\bar{a} \cdot \bar{b}$ es importante, pues expresa:

i) Si $\bar{a} \cdot \bar{b} > 0$, la proyección de $\bar{a}$ en la dirección de $\bar{b}$ tiene el mismo sentido que el vector que recibe la proyección; es decir $\bar{b}$.
ii) Si $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$, la proyección de $\bar{a}$ en la dirección de $\bar{b}$ es el vector nulo.
iii) Si $\bar{a} \cdot \bar{b} < 0$, la proyección de $\bar{a}$ en la dirección de $\bar{b}$ tiene sentido contrario al de $\bar{b}$

6.8 Ángulo entre dos vectores y cosenos directores

Del triángulo rectángulo



En la cual el ángulo $\boldsymbol{\theta}$ es el ángulo que forman los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ al considerarlos en origen común.

Se tiene que:

$$\cos\theta = \frac{\frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2}|\bar{b}|}{|\bar{a}|} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$$

Es decir que: $\cos\theta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$

Despejando $\theta = ang\cos\frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$

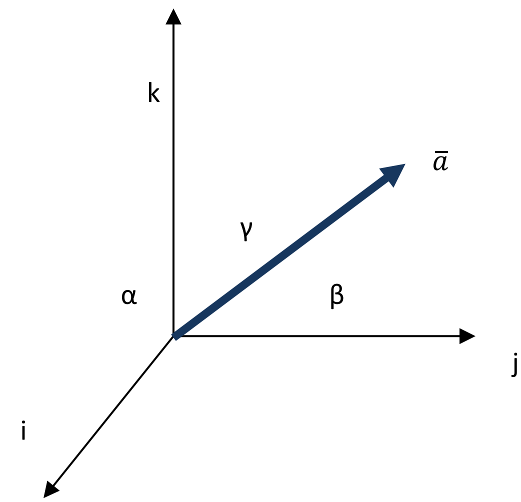
Por otro lado: $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta;\qquad 0^{\circ} \leq \theta \leq 180^{\circ}$

Se debe notar que cuando $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son ortogonales, se tiene que $\cos\theta = 0$ y por lo tanto $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$, que coincide con la proposición enunciada previamente acerca de la ortogonalidad de vectores.

i) Si $\cos\theta > 0$, el ángulo $\boldsymbol{\theta}$ que forman $\bar{a}$ y $\bar{b}$ es agudo.
ii) Si $\cos\theta = 0$, el ángulo $\boldsymbol{\theta}$ es de 90°
iii) Si $\cos\theta < 0$, $\boldsymbol{\theta}$ es obtuso.

Cosenos directores.

Los ángulos directores de un vector $\bar{a}$, son los ángulos $\alpha, \beta\ y\ \gamma$ que respectivamente forma el vector $\bar{a}$ con los vectores unitarios $i, j\ y\ k$.



Las expresiones para calcular los ángulos directores de un vector, se pueden obtener a partir de la expresión planteada anteriormente, esto es:

$$\alpha = ang \cos \frac{\bar{a} \cdot i}{|\bar{a}||i|} = ang\ cos \frac{a_1}{|\bar{a}|}$$

$$\beta = ang \cos \frac{\bar{a} \cdot j}{|\bar{a}||j|} = ang\ cos \frac{a_2}{|\bar{a}|}$$

$$\gamma = ang \cos \frac{\bar{a} \cdot k}{|\bar{a}||k|} = ang\ cos \frac{a_3}{|\bar{a}|}$$

Frecuentemente es más conveniente trabajar con los cosenos de estos ángulos; a dichos cosenos se les llama cosenos directores del vector $\bar{a}$, los cuales está dados por las siguientes expresiones:

$$cos\alpha = \frac{a_1}{|\bar{a}|}; \quad cos\beta = \frac{a_2}{|\bar{a}|}; \quad cos\gamma = \frac{a_3}{|\bar{a}|}$$

Los cosenos directores de un vector no pueden ser arbitrarios; y su relación se puede establecer como sigue:

$$cos^2\alpha = \frac{a_1^2}{|\bar{a}|^2}$$

$$cos^2\beta = \frac{a_2^2}{|\bar{a}|^2}$$

$$cos^2\gamma = \frac{a_3^2}{|\bar{a}|^2}$$

Sumando se tiene

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = \frac{a_1^2}{|\bar{a}|^2} + \frac{a_2^2}{|\bar{a}|^2} + \frac{a_3^2}{|\bar{a}|^2} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{|\bar{a}|^2} = \frac{|\bar{a}|^2}{|\bar{a}|^2}$$

Entonces: $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$

Expresión que relaciona a los cosenos directores del vector $\bar{a}$.

6.9 Producto vectorial, interpretación geométrica y propiedades.

Producto vectorial, solo es aplicable a parejas de vectores del espacio de tres dimensiones y se obtiene como resultado otro vector del mismo espacio, representado por $\bar{a}\ x\ \bar{b}$

DEFINICIÓN: Sean $\bar{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k\ \ y\ \ \bar{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ dos vectores en el espacio de tres dimensiones. El producto vectorial $\bar{a}\ x\ \bar{b}$, que se lee "a cruz b" está definido por el vector:

$$\bar{a}\ x\ \bar{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)i + (a_3b_1 - a_1b_3)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$$

Una representación más fácil de recordar el producto vectorial $\bar{a}\ x\ \bar{b}$ es por medio de un determinante de tercer orden:

$$\bar{a}\ x\ \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)i + (a_3b_1 - a_1b_3)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$$

En el producto vectorial si $\bar{a}\ o\ \bar{b}$ son iguales al vector cero, entonces: $\bar{a}\ x\ \bar{b} = 0i + 0j + 0k = (0,0,0) = \bar{0}$

Propiedades:

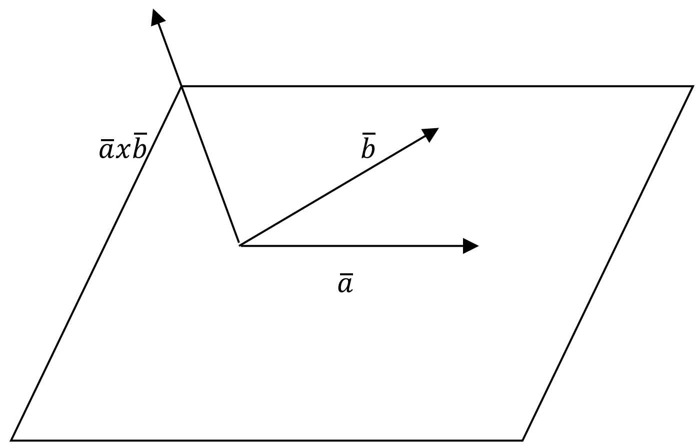
Si λ es un escalar, y $\bar{a}\ y\ \bar{b}$ son dos vectores en el espacio de tres dimensiones, entonces se cumple que:

1. $(\bar{a}\ x\ \bar{b}) = -(\bar{b}\ x\ \bar{a})$ (Anticonmutatividad)
2. $\bar{a}\ x\ (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a}\ x\ \bar{b}) + (\bar{a}\ x\ \bar{c})$ (Ley Distributiva)
3. $\lambda(\bar{a}\ x\ \bar{b}) = (\lambda\bar{a})\ x\ \bar{b}$

El vector $\bar{a}\ x\ \bar{b}$ es perpendicular tanto a $\bar{a}$ como a $\bar{b}$.

Interpretación geométrica.

La definición del producto vectorial está basada en la regla de la mano derecha que dice: Cuando $\bar{a}$ es girado hacia $\bar{b}$ de tal manera que los dedos de la mano derecha giran en la dirección de la rotación, entonces el dedo pulgar indica la dirección del vector $\bar{a}\ x\ \bar{b}$.



6.10 Condición de paralelismo entre vectores.

Dos vectores $\bar{a}\ y\ \bar{b}$ diferentes del vector nulo, son paralelos si y sólo si su producto vectorial es igual a $\bar{0}$ o sea $\left|\bar{a}x\bar{b}\right| = \bar{0}$

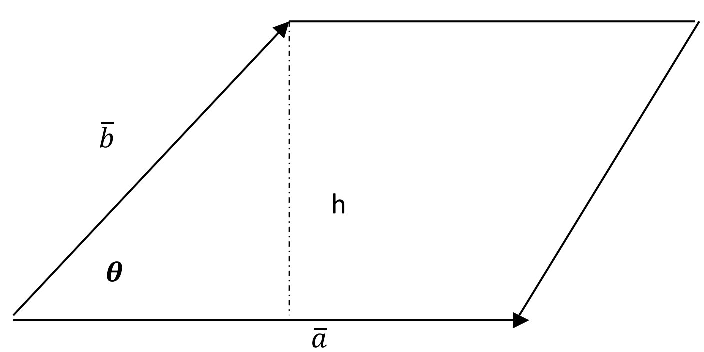
Esta afirmación se basa en la expresión $\left|\bar{a}x\bar{b}\right| = |\bar{a}|\left|\bar{b}\right|sen\theta$, los vectores $\bar{a}\ y\ \bar{b}$ no son nulos y para que $\left|\bar{a}x\bar{b}\right|$ resulte cero, la única posibilidad es que sen $\boldsymbol{\theta}$ sea igual a 0; o sea $\boldsymbol{\theta}$ igual a 0° o 180° . En ambos casos los vectores $\bar{a}\ y\ \bar{b}$ son paralelos, sólo que cuando $\boldsymbol{\theta}$=0° los vectores tienen la misma dirección y cuando $\boldsymbol{\theta}$=180° tienen la dirección opuesta.

Y se deduce que: el producto vectorial de cualquier vector $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ por si mismo es igual a $\bar{0}$; $\bar{a}x\bar{a} = \bar{0}$

6.11 Aplicación del producto vectorial al cálculo del área de un paralelogramo. Producto mixto e interpretación geométrica.

Por medio del producto vectorial, se puede calcular el área de un paralelogramo, a partir del siguiente razonamiento.

Considerando un paralelogramo que aloja en dos de sus lados concurrentes a los vectores $\bar{a}\ y\ \bar{b}$, tal como se demuestra en la siguiente figura.



La altura del paralelogramo está dada por $|\bar{b}|sen\theta$, en tanto que su base es igual a $|\bar{a}|$. El área del paralelogramo será entonces igual a $|\bar{a}||\bar{b}|sen\theta$, que al relacionarla con la expresión

$|\bar{a}x\bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}|sen\theta$, se deduce que el módulo del producto vectorial $\bar{a}x\bar{b}$ es igual al área del paralelogramo en cuyos lados se alojan los vectores $\bar{a}\ y\ \bar{b}$ es decir:

Área del paralelogramo = $|\bar{a}x\bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}|sen\theta$

Producto mixto e interpretación geométrica.

DEFINICIÓN: Dados tres vectores cualesquiera; $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)\ y\ \bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$, se llama producto mixto de los tres vectores $\bar{a}, \bar{b}\ y\ \bar{c}$, al escalar $\bar{a} \cdot (\bar{b}x\bar{c})$.

Al calcular el producto mixto, primero se debe efectuar el producto $\bar{b}x\bar{c}$ ya que si la expresión se asocia de otra manera no tiene significado. Dado que $\bar{a} \cdot \bar{b}$ es un escalar y el producto vectorial está definido para dos vectores.

El producto mixto, denominado también como triple producto escalar, puede expresarse en términos de un determinante de tercer orden:

$$\bar{a} \cdot \bar{b}\,x\,\bar{c} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_2c_3 - b_3c_2, b_3c_1 - b_1c_3, b_1c_2 - b_2c_1)$$

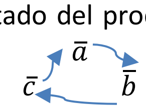
$$\bar{a} \cdot \bar{b}\,x\,\bar{c} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b}\,x\,\bar{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Mediante un cálculo directo se puede demostrar que:

$$\bar{a} \cdot \bar{b}\,x\,\bar{c} = \bar{b} \cdot \bar{c}\,x\,\bar{a} = \bar{c} \cdot \bar{a}\,x\,\bar{b}$$

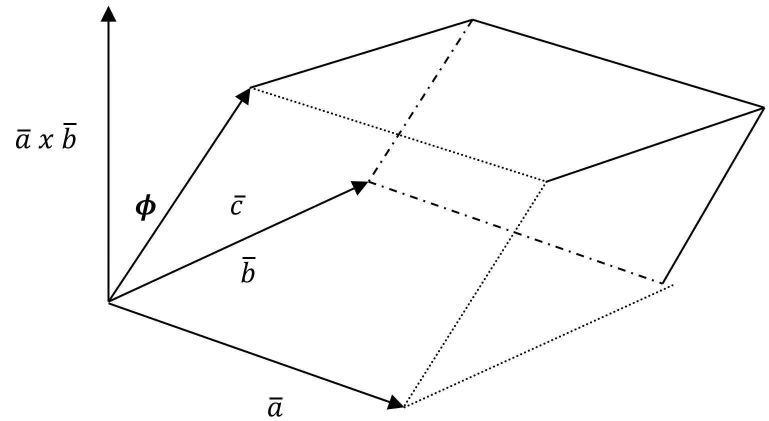
Si en el determinante se intercambia dos veces sus renglones se obtiene el mismo resultado; también se tiene igual resultado si se vuelve a intercambiar dos veces más los renglones. Esto implica que el resultado del producto mixto no se altera al cambiar cíclicamente el orden de los vectores.



En el producto mixto se pueden intercambiar el punto y la cruz, sin que se altere el resultado. Por esta razón, en ocasiones se utiliza la notación $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$ para indicar el producto mixto de los vectores $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, o sea: $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = \bar{a} \cdot \bar{b}\,x\,\bar{c} = \bar{a}\,x\,\bar{b} \cdot \bar{c}$

Representación gráfica:

Considerando tres vectores cualesquiera $\bar{a}, \bar{b}\ y\ \bar{c}$, alojados en tres aristas concurrentes de un paralelepípedo, como se muestra a continuación.



Como se vio anteriormente, el área del paralelogramo, cuyos lados concurrentes son los vectores $\bar{a}\ y\ \bar{b}$ es $\left|\bar{a}\ x\ \bar{b}\right|$. Por otro lado la altura del paralelepípedo en la figura anterior es $|\bar{c}\,|\ cos\varphi$, donde $\boldsymbol{\phi}$ es el ángulo entre $\bar{c}\ y\ \bar{a}\ x\ \bar{b}$. En la figura cos $\boldsymbol{\phi}$ es positivo porque $0° \leq \varphi < 90°$.

Entonces el volumen del paralelepípedo está dada por: $\left|\bar{a}\ x\ \bar{b}\right|\ |\bar{c}|cos\ \boldsymbol{\phi}$

Pero como el producto escalar entre dos vectores es el producto de sus módulos multiplicados por el coseno del ángulo, se tiene que:

$\left(\bar{a}\ x\ \bar{b}\right) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{b}\ x\ \bar{c} = \left[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\right]$ = Volumen del paralelepípedo.

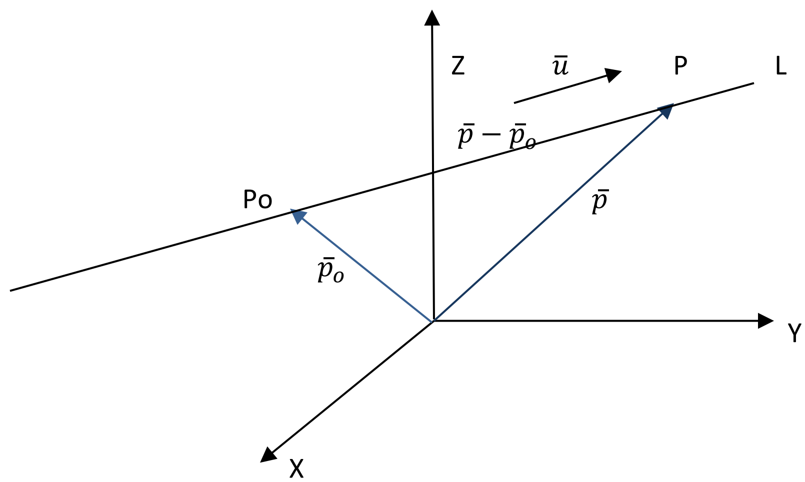
Cuando el ángulo entre $\bar{a}\,x\,\bar{b}\ y\ \bar{c}$ es: $90° < \varphi \leq 180°$, el producto $\left[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\right]$ es el negativo del volumen del paralelepípedo.

Esta interpretación geométrica conduce a la conclusión de que la condición necesaria y suficiente para que tres vectores, con un origen en común, estén en un mismo plano, es que su producto mixto sea igual a cero, por lo que los vectores son coplanares.

7. Recta y plano

7.1 Ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas de la recta. Distancia de un punto a una recta.

Una recta es el conjunto de puntos $P(x, y, z)$ tales que el vector de posición $\bar{p}$ de cualquiera de ellos se puede expresar como la suma del vector de posición $\bar{p}_o$ del punto P_o más un vector paralelo a la recta $\bar{u}$.



Si el vector $\bar{p} - \bar{p}_o$ es paralelo a $\bar{u}$, entonces por la condición de paralelismo entre vectores, existe un escalar $t \in R$ tal que $\bar{p} - \bar{p}_o = t\bar{u}$.

Entonces $\bar{p} = \bar{p}_o + t\bar{u}$

Considerando que $\bar{p}_0$ y $\bar{u}$ están fijos y que el escalar t (parámetro), puede tomar cualquier valor en los reales; entonces se dice que la recta que contiene a $\bar{p}_0$ y es paralela al vector $\bar{u}$, es el conjunto de todos los puntos *P* para los cuales sus respectivos vectores de posición $\bar{p}$ satisfacen la expresión

$\bar{p} = \bar{p}_o + t\bar{u}$, ecuación vectorial de la recta.

La condición para que un punto P pertenezca a la recta L, está dada por: $\bar{p} \neq \bar{p}_0$ pertenece a L si y solo si $\bar{p} - \bar{p}_o$ es paralelo a $\bar{u}$.

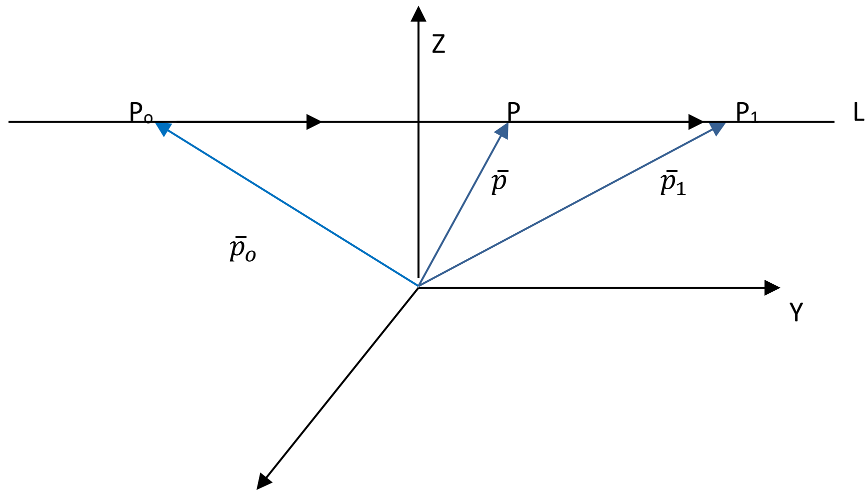
El vector $\bar{u} = (a, b, c)$ determina la dirección de la recta, por lo que a sus componentes se les llama números directores de la recta. Cualquier vector paralelo a $\bar{u}$ determinaría la dirección de la recta y se podrá utilizar como vector director de la recta L.

Cualquier terna de números proporcionales a a, b y c también pueden utilizarse como números directores de la recta.

Si se quiere determinar la ecuación vectorial de la recta a partir de los puntos fijos $P_o(x_o, y_o, z_o)$ y $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, para obtener la ecuación ya se tiene el vector posición $\bar{p}_o$, falta definir el vector $\bar{u}$ que determina la dirección de la recta, por lo cual se debe tomar al vector $\bar{p}_1 - \bar{p}_o$ como el vector $\bar{u}$, entonces la ecuación queda:

$$\bar{p} = \bar{p}_o + t(\bar{p}_1 - \bar{p}_o)$$

En esta ecuación el valor $t = 0$, corresponde al punto P_0, y el valor $t = 1$ corresponde al punto P_1, cuando t toma los valores en el intervalo de $[0,1]$, el punto P describe el segmento de recta que une a P_0 y P_1 . Para valores de t menores que cero o mayores que uno, se obtienen los demás puntos de la recta.



Ecuaciones paramétricas:

De la ecuación vectorial de una recta al sustituir los vectores por sus respectivas componentes se tiene:

$$(x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + t(a, b, c) = (x_o, y_o, z_o) + (ta, tb, tc)$$
$$(x, y, z) = (x_o + ta, y_o + tb, z_o + tc)$$

Por igualdad de vectores, entonces:

$$x = x_o + ta; \quad y = y_o + tb; \quad z = z_o + tc$$

Y son llamadas las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene el punto P, y cuyo vector director es $\bar{u}$.

Ahora bien, si ninguna de las componentes del vector director es cero, se puede despejar al parámetro t de las ecuaciones paramétricas, obteniendo:

$$t = \frac{x - x_o}{a}, \quad t = \frac{y - y_o}{b}; \quad t = \frac{z - z_o}{c}$$

Igualando se obtiene: $\frac{x-x_o}{a} = \frac{y-y_o}{b} = \frac{z-z_o}{c}$

Que son las ecuaciones en forma simétrica de la recta que contiene a p_0 y es paralela a $\bar{u}$

Si una o dos de las componentes de $\bar{u}$ son nulas, se presentan casos particulares en estas ecuaciones. Por ejemplo si el vector $\bar{u}$ es paralelo al plano YZ, la recta también será paralela al plano YZ.

Ecuación de la recta que contiene a dos puntos dados.

Dada la ecuación vectorial que contiene a los puntos $P_0 = (x_0, y_0, z_0)\ y\ P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y sean los vectores de posición $\bar{p}, \bar{p}_0\ y\ \bar{p}_1$.

Al sustituirlos en la ecuación vectorial:

$$(x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + t[(x_1, y_1, z_1) - (x_0, y_0, z_0)] = (x_o, y_o, z_o) + t(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$
$$= (x_o + t(x_1 - x_0), y_o + t(y_1 - y_0), z_o + t(z_1 - z_0))$$

Por igualdad de vectores se tiene:

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0),\ \ y = y_0 + t(y_1 - y_0),\ \ \ z = z_0 + t(z_1 - z_0)$$

Obteniendo las ecuaciones paramétricas de la recta que contienen a los puntos P y P1.

Si $x_1 \neq x_0,\ y_1 \neq y_0\ y\ z_1 \neq z_0$, se puede despejar al parámetro de las ecuaciones:

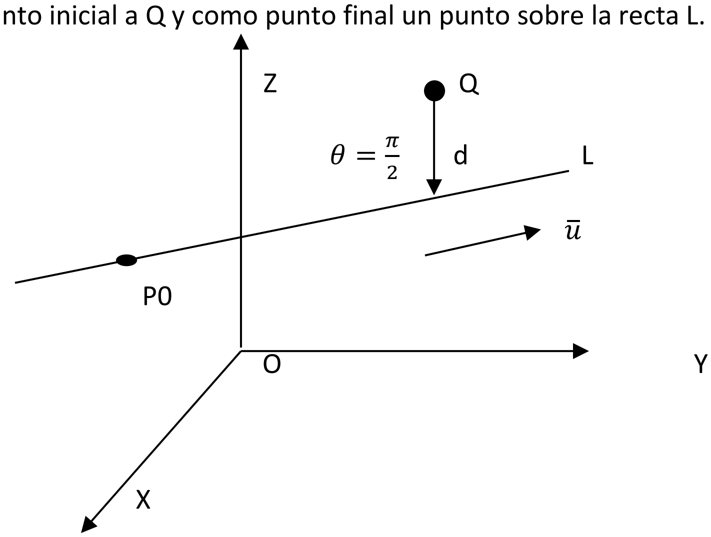
$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Ecuaciones de forma simétrica de la recta que contiene a los puntos P_0 y P_1

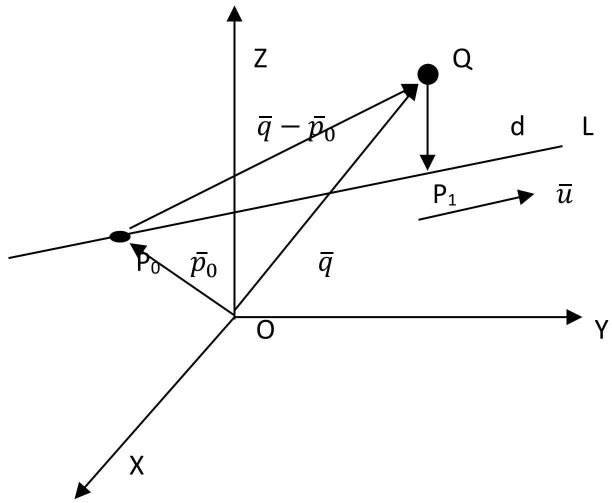
Distancia de un punto a una recta

Sea L una recta que contiene al punto P_0 y es paralela a $\bar{u}$, y sea Q un punto fijo dado que no pertenece a L.

La distancia del punto Q a la recta L es igual a la longitud del segmento dirigido que es perpendicular a L y que tiene como punto inicial a Q y como punto final un punto sobre la recta L.



Para calcular el valor de la distancia *d*, se puede hacer por distintos procedimientos, si se considera la siguiente figura:



Del triángulo rectángulo P_0, P_1 y Q se tiene: $sen\,\alpha = \frac{d}{|\bar{q}-\bar{p}_0|}$, donde $\bar{q}\ y\ \bar{p}_0$ son los vectores de posición de los puntos Q y P_0 respectivamente.

Al despejar a *d* se tiene: $d = |\bar{q}-\bar{p}_0|\ sen\,\alpha$

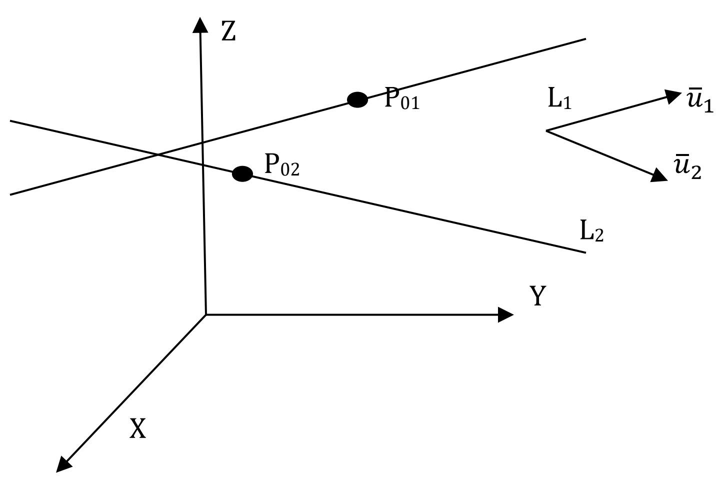
El ángulo α lo forman la recta y el segmento $\overline{P_0Q}$ y es el mismo que forma el vector $\bar{q}-\bar{p}_0$ con el vector $\bar{u}$. Por lo que el $sen\,\alpha = \frac{|(\bar{q}-\bar{p}_0) x\, \bar{u}|}{|\bar{q}-\bar{p}_0||\bar{u}|}$

Sustituyendo en la expresión de distancia: $d = |\bar{q}-\bar{p}_0| \frac{|(\bar{q}-\bar{p}_0) x\, \bar{u}|}{|\bar{q}-\bar{p}_0||\bar{u}|} = \frac{|(\bar{q}-\bar{p}_0) x\, \bar{u}|}{|\bar{u}|}$

7.2 Condición de perpendicularidad y condición de paralelismo entre rectas. Ángulo entres dos rectas. Distancia entre dos rectas. Intersección entre dos rectas.

Ángulo entres dos rectas

Sea L_1 una recta que contiene al punto P_{01} y es paralela a $\bar{u}_1$, y sea L_2 una recta que contiene al punto P_{02} y es paralela a $\bar{u}_2$.



El ángulo $\boldsymbol{\theta}$ que forman dos rectas L_1 y L_2 en el espacio de tres dimensiones, es el ángulo que forman sus respectivos vectores directores $\bar{u}_1\ y\ \bar{u}_2$.

Y de acuerdo con la definición sobre ángulo entre vectores, $\boldsymbol{\theta}$ está dado por la siguiente expresión: $\theta = ang \cos \frac{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2}{|\bar{u}_1||\bar{u}_2|}$

Condición de perpendicularidad y condición de paralelismo entre rectas

Sean las rectas L_1 y L_2 paralelas a los vectores $\bar{u}_1\ y\ \bar{u}_2$ respectivamente.

Perpendicularidad: Se dice que dos rectas son perpendiculares cuando el ángulo que forman es de 90°, es decir cuando el ángulo entre sus vectores directores $\bar{u}_1\ y\ \bar{u}_2$ es de 90°.

Esto lleva a que si la expresión $\cos\theta = \frac{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2}{|\bar{u}_1||\bar{u}_2|}$, y considerando el ángulo de 90°, entonces:

$$0 = \frac{\bar{u}_1\ \cdot\ \bar{u}_2}{|\bar{u}_1||\bar{u}_2|} \quad \therefore \quad \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = 0$$

De aquí que se tiene la siguiente condición; dos rectas son perpendiculares si y sólo si el producto escalar entre sus respectivos vectores directores es igual a cero.

Paralelismo: Si L_1 es paralela a $\bar{u}_1$ y L_2 es paralela a $\bar{u}_2$, y a su vez L_1 es paralela a L_2 , entonces $\bar{u}_1\ y\ \bar{u}_2$ son vectores paralelos, es decir el ángulo entre $\bar{u}_1\ y\ \bar{u}_2$ es igual a 0° o 180°.

De la expresión de álgebra vectorial:

$$sen\ \theta = \frac{|\bar{u}_1\ x\ \bar{u}_2|}{|\bar{u}_1||\bar{u}_2|}$$

Al considerar un ángulo de 0° o 180°, entonces sen $\boldsymbol{\theta}$=0 por lo que:

$$0 = \frac{|\bar{u}_1\ x\ \bar{u}_2|}{|\bar{u}_1||\bar{u}_2|}$$

De donde: $\bar{u}_1\ x\ \bar{u}_2 = \bar{0}$

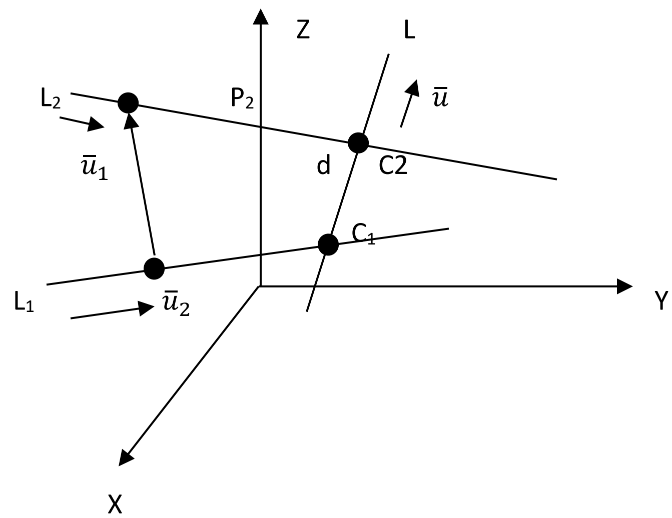
Entonces dos rectas serán paralelas si y solo si el producto vectorial entres sus respectivos vectores directores es igual al vector cero.

Se puede afirmar también que la recta L_1 es paralela a la recta L_2, si las componentes de sus respectivos vectores directores son proporcionales.

Distancia entre dos rectas.

Sean L_1 una recta que contiene al punto P_1 y es paralela al vector $\bar{u}_1$ y sea L_2 una recta que contiene a P_2 y es paralela a $\bar{u}_2$

La distancia entre dos rectas en el espacio de tres dimensiones, es la mínima longitud que existe entre ambas, medida sobre una perpendicular común.



Si L es perpendicular a L_1 y L_2, entonces un vector director de L, es también perpendicular a $\bar{u}_1\ y\ \bar{u}_2$, entonces: $\bar{u} = \bar{u}_1\ x\ \bar{u}_2$

El vector que se obtiene de restar los vectores de posición de los puntos conocidos de L_1 y L_2,

$(\bar{p}_2 - \bar{p}_1)$, se traslada paralelamente, de tal forma que su punto inicial coincida con el punto C_1 (intersección entre L con L_2).

Entonces la distancia es igual al valor absoluto de la componente escalar del vector $(\bar{p}_2 - \bar{p}_1)$ sobre la dirección de L, que es equivalente a:

$$d = |Comp.esc_{\bar{u}}(\bar{p}_2 - \bar{p}_1),| = \left|Comp.esc_{\bar{u}_1 x \bar{u}_2}(\bar{p}_2 - \bar{p}_1)\right|$$

$$d = \frac{|(\bar{p}_2 - \bar{p}_1)\cdot(\bar{u}_1 x\ \bar{u}_2)|}{|\bar{u}_1 x\ \bar{u}_2|}$$

Esta expresión permite calcular la distancia entre dos rectas que se cruzan o intersectan, que será cero.

Si las rectas son paralelas, la expresión no tiene solución, ya que su producto vectorial es igual a cero. En este caso la distancia entre las rectas es igual a la distancia de una de ellas a un punto cualquiera de la otra.

Intersección entre dos rectas

En el caso de que las rectas sean paralelas y la distancia entre ellas sea igual a cero, entonces todos sus puntos son comunes, es decir las rectas son coincidentes.

Cuando se sabe que dos rectas se intersectan, se puede determinar el punto de intersección.

Si el punto $P(x, y, z)$ es el punto de intersección, entonces sus coordenadas deben satisfacer simultáneamente a las ecuaciones de las rectas, en tal caso se puede hacer la siguiente igualación:

$$x_1 + t_1 a_1 = x_2 + t_2 a_2$$
$$y_1 + t_1 b_1 = y_2 + t_2 b_2$$
$$z_1 + t_1 c_1 = z_2 + t_2 c_2$$

Siendo datos $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$, entonces las incógnitas son los parámetros $t_1 \ y \ t_2$. Esto implica que se tiene un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas, el cual tiene solución única o no tiene solución.

Se resuelve para dos de las ecuaciones y los valores de $t_1 \ y \ t_2$ satisfacen la tercera ecuación, entonces esos valores de $t_1 \ y \ t_2$ son la solución al sistema. Si no se satisface la tercera ecuación entonces el sistema no tiene solución y en consecuencia las rectas no se intersectan.

Si existe la solución, entonces al sustituir el valor de t_1 en las ecuaciones de L_1 o el de t_2 en las ecuaciones de L_2, se obtendrán los valores de *x, y, z*, correspondientes a las coordenadas del punto de intersección.

7.3 Ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas y ecuación cartesiana del plano

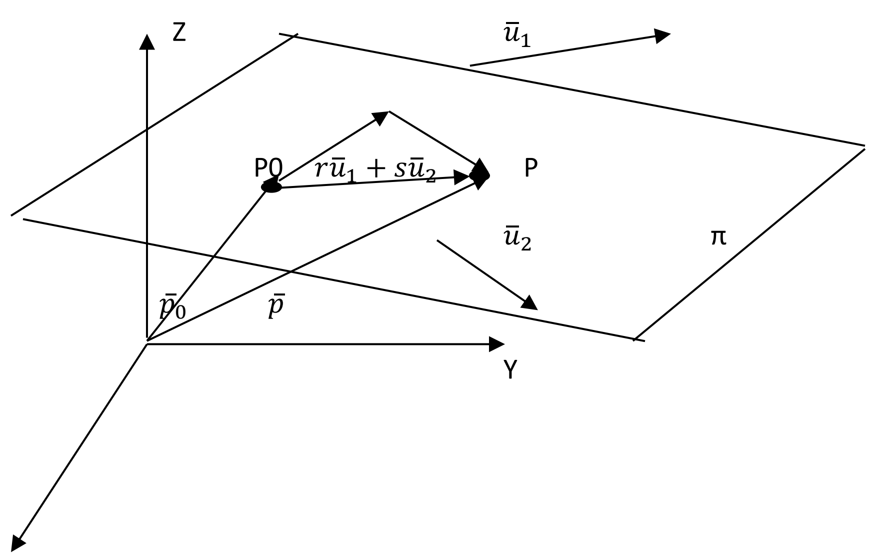
Ecuación vectorial del plano

Un plano en el conjunto de puntos $P(x, y, z)$ tales que el vector de posición de cualquiera de ellos se puede expresar como la suma del vector de posición $\bar{p}_0$ del punto P_0 más dos vectores paralelos a $\bar{u}_1 \ y \ \bar{u}_2$ respectivamente.

Y queda expresado por la siguiente ecuación vectorial: $\bar{p} = \bar{p}_0 + r\bar{u}_1 + s\bar{u}_2; \ \ r, s \in R$

Si r=s=0 entonces la ecuación se reduce a $\bar{p} = \bar{p}_0$, lo que indica que el punto P_0 pertenece al plano.

La interpretación geométrica es la siguiente:



X

Ecuación vectorial del plano que contiene al punto P_0 y que es generado por los vectores $\bar{u}_1, \bar{u}_2$:
$\bar{p} = \bar{p}_0 + r\bar{u}_1 + s\bar{u}_2$; $r, s \epsilon R$

Plano definido por dos rectas que se intersectan:

En este caso se han definido dos rectas que están contenidas en el plano y que se intersectan en P_0 y cuyos vectores directores son los vectores que generan al plano.

Contrariamente dos rectas no coincidentes, que se intersectan en un punto, definen a un plano cuyos vectores generadores son respectivamente los vectores directores de las rectas.

Plano definido por tres puntos no colineales.

Sean tres puntos $P_0 = (x_0, y_0, z_0), P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ que no pertenecen a una misma recta.

Teorema: Si P_0, P_1 y P_2 son tres puntos no colineales, existe un plano π y solo uno que contiene a los tres puntos.

Para obtener la ecuación vectorial de un plano definido por tres puntos los vectores generadores se pueden determinar restando los respectivos vectores de posición de los tres puntos.

$$\bar{u}_1 = \bar{p}_1 - \bar{p}_0 \qquad \bar{u}_2 = \bar{p}_2 - \bar{p}_0$$

Y la ecuación vectorial del plano queda: $\bar{p} = \bar{p}_0 + r(\bar{p}_1 - \bar{p}_0) + s(\bar{p}_2 - \bar{p}_0)$

Ecuaciones paramétricas

Si en la ecuación vectorial del plano $\bar{p} = \bar{p}_0 + r\bar{u}_1 + s\bar{u}_2$ se sustituyen a los vectores por sus respectivas componentes se tiene:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + r(a_1, b_1, c_1) + s(a_2, b_2, c_2)$$
$$(x, y, z) = (x_0 + ra_1 + sa_2, y_0 + rb_1 + sb_2, z_0 + rc_1 + sc_2)$$

Por igualdad de vectores se tiene:

$$x = x_0 + ra_1 + sa_2$$
$$y = y_0 + rb_1 + sb_2$$
$$z = z_0 + rc_1 + sc_2$$

Que son las ecuaciones paramétricas del plano que contiene al punto P_0 y se genera por $\bar{u}_1\ y\ \bar{u}_2$

Ecuación cartesiana del plano

Para establecer la representación cartesiana del plano, se puede eliminar los parámetros con las tres ecuaciones paramétricas. Al ser dos parámetros el resultado será una sola ecuación.

Por otro lado, se puede trabajar con la ecuación normal del plano, esto es: se obtiene un vector normal que será el vector perpendicular al plano, que es generado por $\bar{u}_1 \ y \ \bar{u}_2$, por lo cual este vector normal ($\bar{N}$) también será perpendicular a $\bar{u}_1 \ y \ \bar{u}_2$.

De esto se obtiene que la ecuación normal del plano está dada por: $(\bar{p}-\bar{p}_0) \cdot (\bar{u}_1 \, x \, \bar{u}_2) = 0$ y si el plano está definido por tres puntos no colineales, la ecuación será:

$(\bar{p}-\bar{p}_0) \cdot ((\bar{p}_1-\bar{p}_0) \, x \, (\bar{p}_2-\bar{p}_0))$ =0

Así para conformar un plano π que contiene al punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y cuyo vector normal es

$$\bar{N} = (A, B, C).$$

Al usar la ecuación normal $(\bar{p}-\bar{p}_0) \cdot \bar{N} = 0$, por propiedades del producto escalar, la ecuación se puede expresar como: $\bar{N} \cdot \bar{p} - \bar{N} \cdot \bar{p}_0 = 0$

Sustituyendo los vectores por sus respectivas componentes:

$$(A, B, C) \cdot (x, y, z) - (A, B, C) \cdot (x_0, y_0, z_0) = 0$$

Efectuando los productos escalares:

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$$

Si se hace: $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$

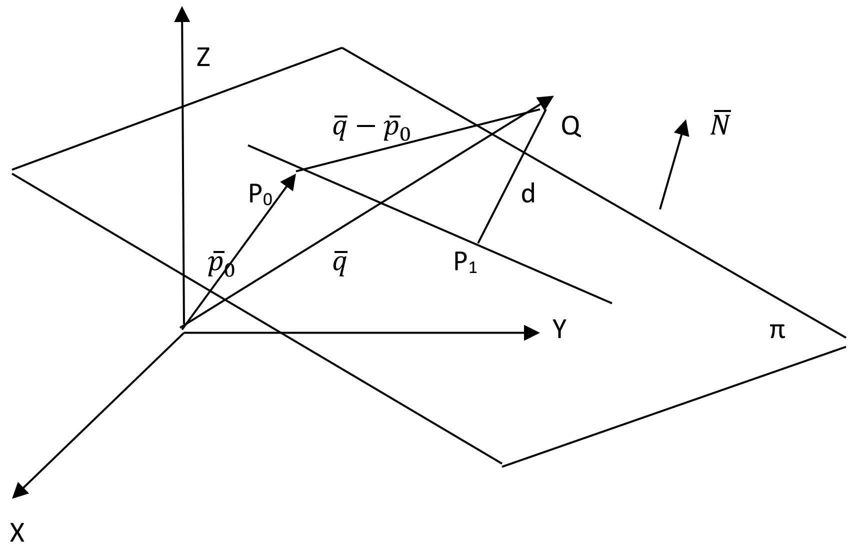
Queda: $Ax + By + Cz + D = 0$ que es la ecuación cartesiana general del plano.

7.4 Distancia de un punto a un plano. Ángulo entre dos planos.

Sea un plano π que contiene al punto P_0 y cuyo vector normal es $\bar{N}$, y sea un punto Q que no pertenece al plano.

La distancia de un plano a un punto Q, es la longitud del segmento dirigido ortogonal al plano, y cuyo punto inicial es un punto del plano y punto final es Q.

Gráficamente:



La distancia es el valor absoluto de la componente escalar del vector $\bar{q}-\bar{p}_0$ sobre $\bar{N}$:

$d = |Comp.Esc._{\bar{N}}\, \bar{q}-\bar{p}_0| = \frac{|(\bar{q}-\bar{p}_0)\cdot \bar{N}|}{|\bar{N}|}$

En el caso particular de encontrar la distancia de un plano al origen, se sabe entonces que el plano contiene al punto P_0 y su vector normal es $\bar{N}$ por lo que:

$$d = \frac{\left|(\bar{0}-\bar{p}_0)\cdot\ \bar{\bar{N}}\right|}{|\bar{N}|} = \frac{|-(\bar{p}_0\cdot\bar{N})|}{|\bar{N}|}$$

Recordando que $-(\bar{p}_0\cdot\bar{N})$=D, lo que implica que si el plano está dado por su ecuación cartesiana, entonces la distancia del origen al plano está dada por: $d = \frac{|D|}{|\bar{N}|}$.

Ahora si el plano contiene al origen, entonces esta distancia será cero.

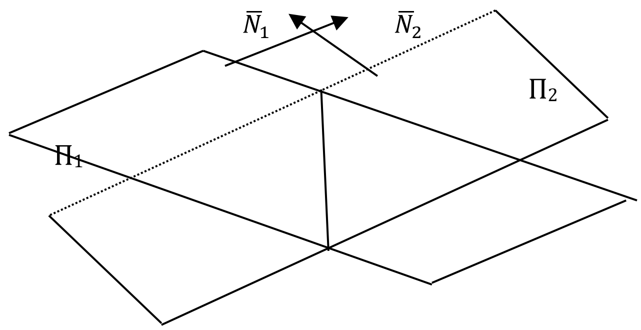
$0 = \frac{|D|}{|\bar{N}|}$ expresión que se cumple sólo cuando D=0

Entonces la ecuación cartesiana de un plano que contiene al origen del sistema de referencia es: $Ax + By + Cz = 0$

Ángulo entre dos planos

El ángulo entre los planos π_1 y π_2 es el ángulo $\boldsymbol{\theta}$ que forman sus respectivos vectores normales $\bar{N}_1\ y\ \bar{N}_2$

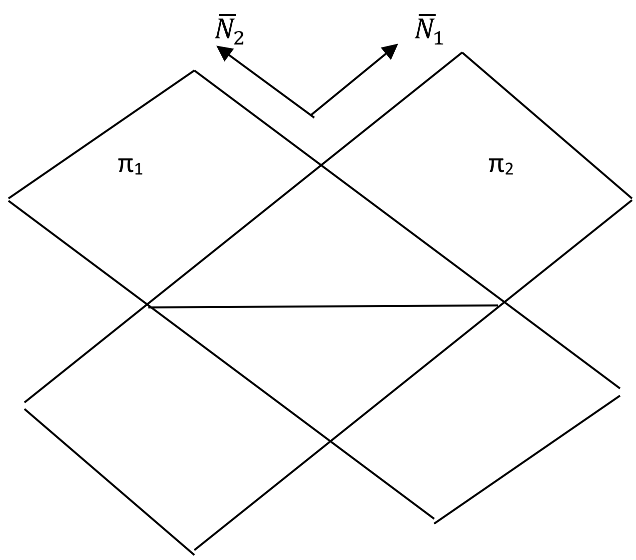
Sea P_1 y $\bar{N}_1$ el punto y el vector normal que definen a un plano π_1 y sea P_2 y $\bar{N}_2$ el punto y el vector normal que definen a otro plano π_2, y de acuerdo a la expresión para calcular el ángulo entre dos vectores, se tiene que el ángulo entre el plano π_1 y π_2 es: $\theta = ang\cos\frac{\bar{N}_1\cdot\bar{N}_2}{|\bar{N}_1||\bar{N}_2|}$



7.5 Condición de perpendicularidad y condición de paralelismo entre planos

Dos planos π_1 y π_2 son perpendiculares si y sólo si sus respectivos vectores normales son ortogonales.

Entonces: $\cos 90° = \frac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{|\overline{N}_1||\overline{N}_2|} = 0,\ \overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2 = 0.$



Si en la ecuación cartesiana de un plano el coeficiente de la variable Z es cero, entonces el plano es perpendicular al plano coordenado XY.

$$Ax + By + D = 0$$

Esto porque el vector normal del plano debe ser ortogonal a cualquier vector normal a XY, pero a su vez cualquier vector normal al plano XY es paralelo a la dirección del eje Z, por lo que su tercer componente es nula y el vector normal del plano es del tipo $\overline{N} = (A, B, 0)$

De forma análoga se concluye que si en la ecuación cartesiana de un plano, el coeficiente de la variable Y o el de la variable X es cero, entonces el plano es perpendicular al plano XZ o al YZ respectivamente.

Paralelismo.

DEFINICIÓN: Dos planos π_1 y π_2 son paralelos si y sólo si sus respectivos vectores normales son paralelos.

Es decir: $\bar{N}_1 \; x \; \bar{N}_2 = 0$ lo que es equivalente a que se cumpla también que: $\bar{N}_1 = k\bar{N}_2, \; k \neq 0$

Si el plano π es paralelo al plano XY, entonces el vector normal a π debe ser paralelo a cualquier vector normal a XY, pero a su vez cualquier vector normal al plano XY es paralelo a la dirección del eje Z y como consecuencia es ortogonal a la dirección del eje X y a la dirección del eje Y, de donde sus dos primeras componentes serán nulas es decir: $\bar{N} = (0,0,C)$

La ecuación cartesiana del plano paralelo al *XY* es de la forma: $CZ + D = 0$

Donde: $Z = \frac{-D}{C}$ Pero $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0) \;\; A = 0 \quad B = 0\,; \;\; \therefore \;\; D = -CZ_0$

Sustituyendo $Z=Z_0$, donde Z_0 es la cota de todos los puntos del plano, por lo que se concluye que un plano paralelo al plano XY tiene una ecuación de la forma Z=k, k es constante.

El plano paralelo a YZ se tiene una ecuación de la forma X=k.

Un plano paralelo al XZ es Y=k.

7.6 Distancia entre dos planos

En el espacio, dos planos se intersectan o son paralelos. En caso de ser paralelos, la distancia entre ambos estará dada por la distancia de uno de los planos a un punto del otro plano, la cual se puede calcular por la expresión: $d = \frac{|(\bar{q}-\bar{p}_0)\cdot \bar{N}|}{|\bar{N}|}$

En caso de intersectarse se considera que la distancia es nula.

7.7 Intersección entre dos planos

La intersección de dos planos π_1 y π_2 es el conjunto de todos los puntos que pertenecen tanto al plano π_1 y al plano π_2.

Si cada punto de la intersección de dos planos está contenido en ambos entonces cualquier punto de la intersección deberá satisfacer las ecuaciones de los dos planos.

Las características de la intersección entre dos planos están dadas por el siguiente teorema.

Teorema: Para dos planos π_1 y π_2 se tiene que:

a) Si π_1 y π_2 son paralelos no coincidentes, entonces su intersección es el conjunto vacío $\pi_1 \cap \pi_2 = \phi$
b) Si π_1 y π_2 son coincidentes entonces: $\pi_1 \cap \pi_2 = \pi_1 = \pi_2$
c) Si π_1 y π_2 no son paralelos ni coincidentes, entonces su intersección es una recta.

A las intersecciones de un plano π con los planos coordenados se les llama trazas del plano π.

Dado un plano π cuya ecuación cartesiana es *Ax+By+Cz+D=0*

La traza del plano π sobre el plano XY, es una recta contenida en el plano XY; la cota de cualquier punto contenido en XY es igual a cero, por lo que haciendo z=0, la ecuación cartesiana del plano es *Ax+By+D=0; z=0*; que serán las ecuaciones de la traza del plano π sobre el plano XY.

Análogamente*: Ax+Cz+D=0; y=0*; son las ecuaciones de la traza del plano π sobre el plano XZ.

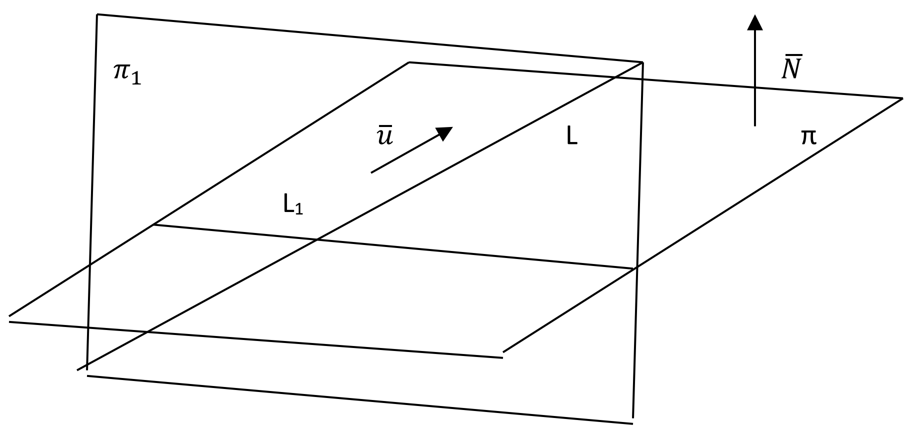
Finalmente*: By+Cz+D=0; x=0*; son las ecuaciones de la traza del plano YZ.

7.8 Ángulo entre una recta y un plano

El ángulo entre el plano π y la recta L, es el ángulo que forma la recta L con su proyección ortogonal sobre el plano π.

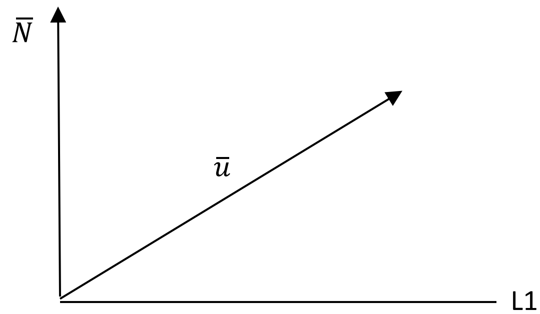
Sea una recta L definida por un punto P_0 y su vector director $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$, y sea un plano π definido por un punto P_1 y su vector normal $\bar{N} = (A, B, C)$

Se entenderá por proyección ortogonal de la recta L sobre el plano π, la intersección de π con un plano perpendicular a π y que contiene a la recta L .



En la figura π_1 es un plano perpendicular al plano π y que contiene a la recta L, la intersección del plano π_1 y π se ha representado por L_1, el ángulo entre π y L es el ángulo $\boldsymbol{\theta}$ que hay entre las rectas L y L_1.

El ángulo es complementario al que forman los vectores $\bar{u}$ y $\bar{N}$.



Así que ϕ= 90° - $\boldsymbol{\theta}$

Para calcular ϕ se tiene: $\cos\emptyset = \frac{\bar{N}\cdot\bar{u}}{|\bar{N}||\bar{u}|}$ entonces $\cos(90° - \theta) = \frac{\bar{N}\cdot\bar{u}}{|\bar{N}||\bar{u}|}$

Pero: $\cos(90° - \theta) = cos90°cos\theta + sen90°sen\theta = sen\theta$

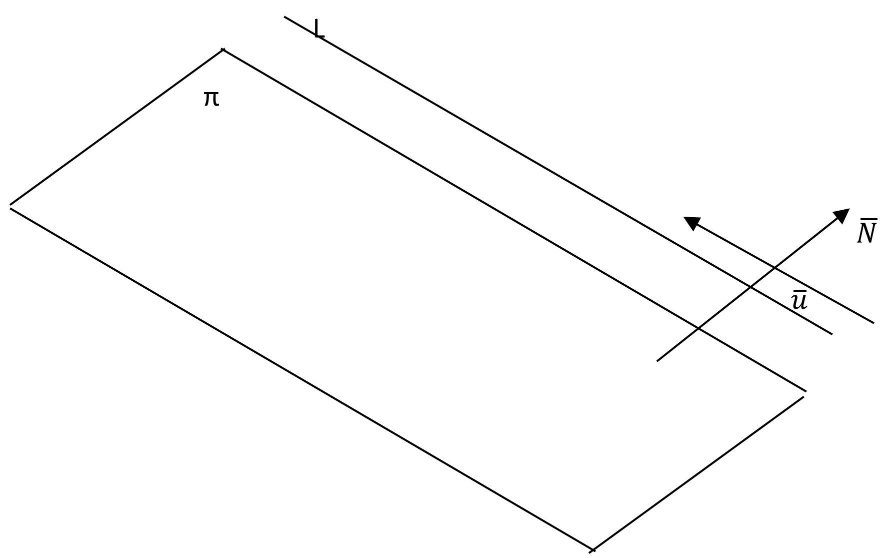
Finalmente: $sen\theta = \frac{\bar{N}\cdot\bar{u}}{|\bar{N}||\bar{u}|}$

7.9 Condición de paralelismo y condición de perpendicularidad entre una recta y un plano.

Sea un plano π definido por un punto P_1 y su vector normal $\bar{N} = (A, B, C)$, y sea una recta L definida por un punto P_0 y su vector director $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$

El plano y la recta son paralelos si y solo si el vector normal del plano es ortogonal al vector director de la recta.

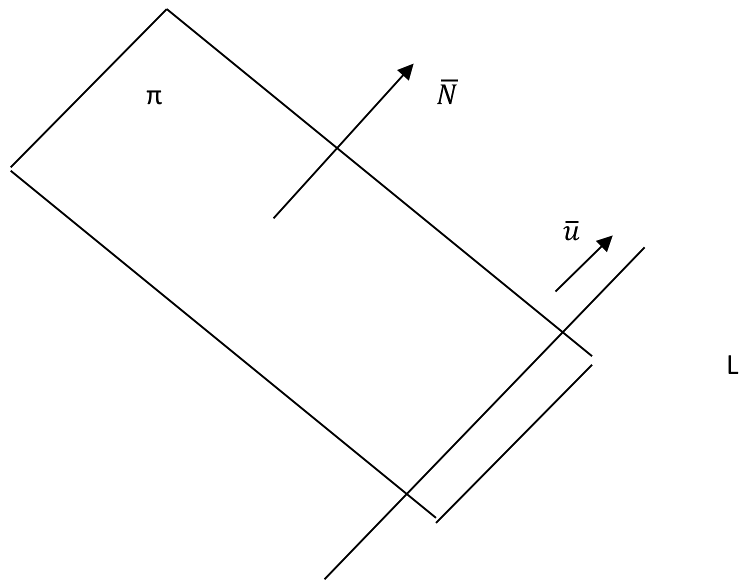
$$\pi \| L \leftrightarrow \bar{N}\cdot\bar{u} = 0$$



Perpendicularidad.

El plano y la recta son perpendiculares si y solo si el vector normal del plano es paralelo al vector director de la recta.

π ⊥ L ↔ $\bar{N} = k\bar{u},\ k \neq 0$



7.10 Intersección de una recta con un plano

Para un plano π y una recta L se tiene.

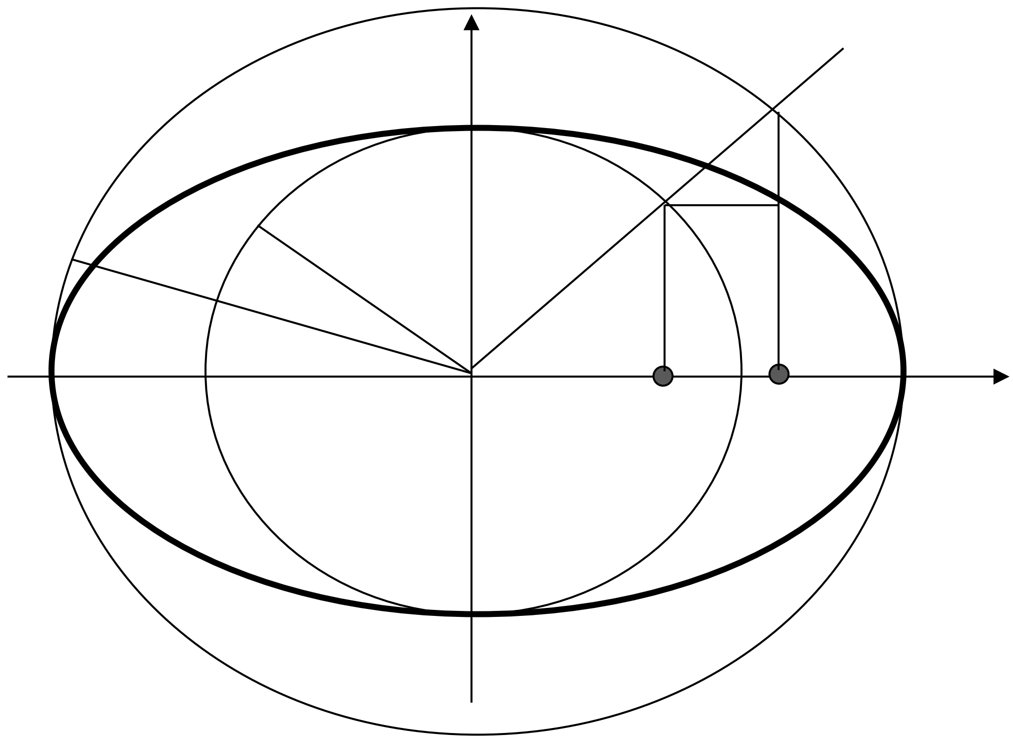
a) Si π y L son paralelos y L no está contenida en π, su intersección es el conjunto vacío:
$$\pi \cap L = \emptyset$$
b) Si π y L son paralelos y L está contenida en π, su intersección es igual a L: $\pi \cap L = L$
c) Si π y L no son paralelos, su intersección es un punto. Sea $\pi\!: (\bar{p} - \bar{p}_0) \cdot \bar{N} = 0\ \ y\ L\!: \bar{p} = \bar{p}_1 + t\bar{u}$, el punto P de L está contenido en π si y sólo si dado por su vector de posición se cumple que: $\left((\bar{p}_1 + t\bar{u}) - \bar{p}_0\right) \cdot \bar{N} = 0$

7.11 Distancia entre una recta y un plano.

Para determinar la distancia entre el plano y la recta, el problema se reduce a calcular la distancia de un punto de la recta L al plano π. (Distancia de un punto a un plano)

Representación cartesiana, paramétrica y vectorial de las cónicas

Elipse: Considerando dos circunferencias concéntricas de radio a y b, con centro en el origen, siendo a > b. Se traza una recta cualquiera L que pasa por el origen, formando un ángulo $\boldsymbol{\theta}$ con la parte positiva del eje X. Esta recta corta a las dos circunferencias en los puntos A y B.



De la figura se tiene que: $x = a\ sen\theta$, $\quad y = \ b\ sen\theta$ que son las ecuaciones paramétricas de la elipse.

Si se toma el vector de posición del punto P, se puede plantear la ecuación vectorial correspondiente. $\bar{p} = (a\ cos\theta)i + (b\ sen\theta)j + 0k$

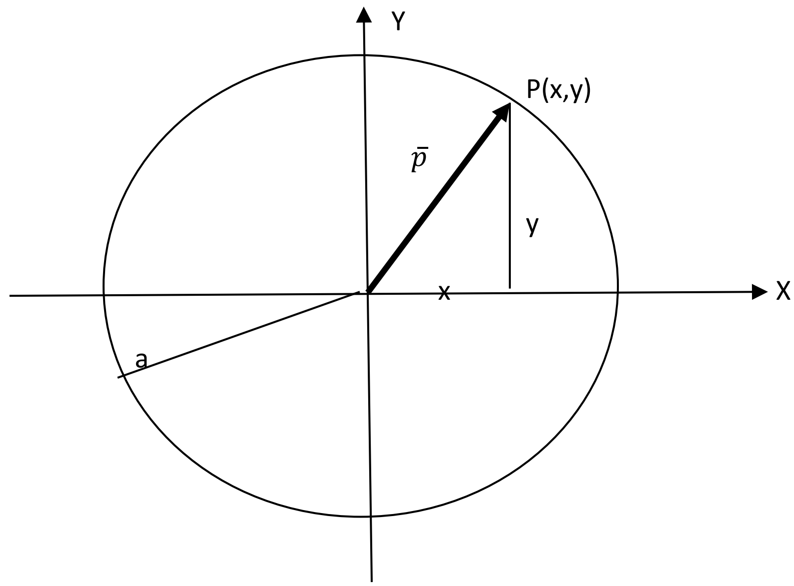
Para eliminar el parámetro: $x^2 = a^2 cos^2\theta$, $\quad y^2 = b^2 sen^2\theta$, despejando $cos^2\theta\ \ y\ \ sen^2\theta$

$$cos^2\theta = \frac{x^2}{a^2}, \qquad sen^2\theta = \frac{y^2}{b^2}$$

Sumando estas expresiones se tiene: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cos^2\theta + sen^2\theta$

Entonces: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, es la ecuación cartesiana de la elipse con centro en el origen.

Circunferencia: Sea una circunferencia con centro en el origen y radio a. Sea $\bar{p}$ el vector de posición del punto P de la circunferencia. Se designa con $\boldsymbol{\theta}$ al ángulo que forma el vector con la parte positiva de eje X.



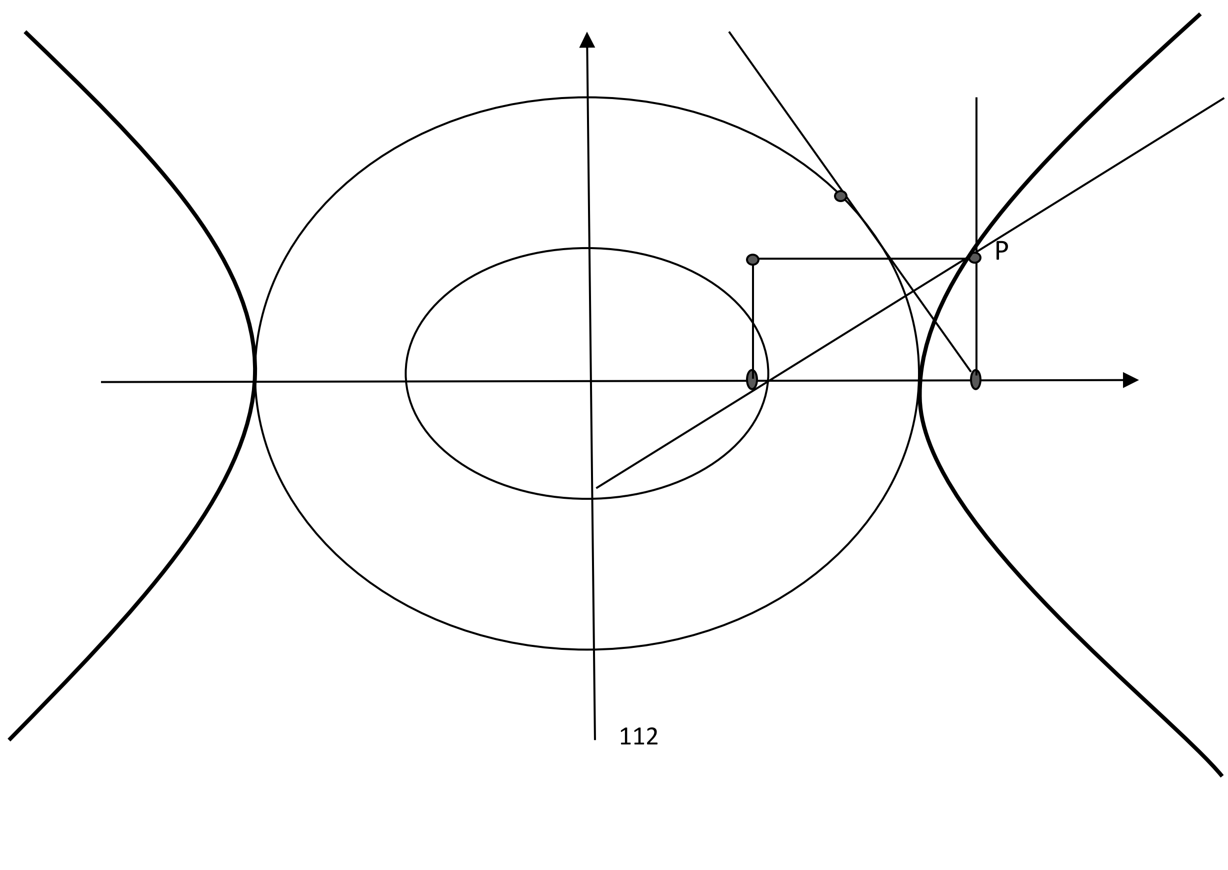
$$x = |\bar{p}|cos\theta, \quad y = |\bar{p}|sen\theta$$

Pero $|\bar{p}| = a$ por lo que $x = a\ cos\theta$; $y = a\ sen\theta$ (Ecuaciones paramétricas)

La ecuación vectorial correspondiente es: $\bar{p} = (a\ cos\theta)i + (a\ sen\theta)j + 0k$

Eliminando el parámetro en las ecuaciones de la circunferencia se obtiene la ecuación cartesiana: $x^2 + y^2 = a^2$

Hipérbola: Se consideran dos circunferencias concéntricas, con centro en el origen y radio a y b respectivamente, a > b. Se traza una recta M que pasa por el origen y forma un ángulo $\boldsymbol{\theta}$ con el eje X.



Por lo que: $x = a\ sec\theta$; $y = b\ tan\theta$ (ecuaciones paramétricas de la hipérbola)

Si $\bar{p}$ es el vector de posición del punto P, la ecuación vectorial correspondiente es: $\bar{p} = (a\ sec\theta)i + (b\ tan\theta)j + 0k$

Eliminando el parámetro $\boldsymbol{\theta}$ de las ecuaciones paramétricas (mediante la desigualdad

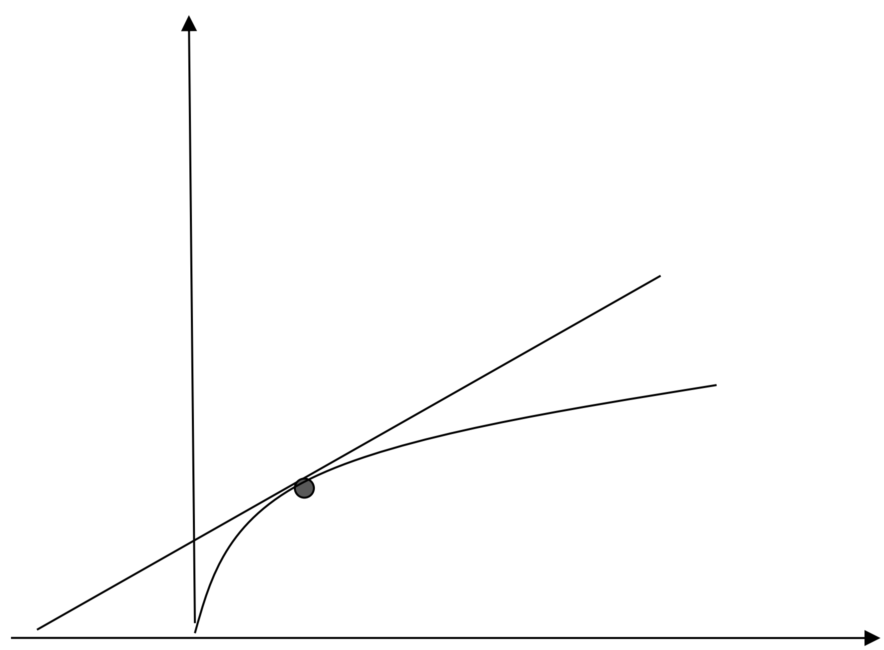
$sec^2\theta - tan^2\theta = 1$), se obtiene la ecuación cartesiana:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Parábola: Sea una parábola con vértice en el origen, cuya ecuación cartesiana es:

$$y^2 = 4px; \quad y \geq 0$$

Si α es el ángulo de inclinación de la tangente a la curva en cualquier punto.



Aplicando derivada como tan α: $2yy' = 4p$

$$tan\alpha = y' = \frac{4p}{2y} = \frac{2p}{y}, \quad y \neq 0$$

Despejando a y: $y = \frac{2p}{tan\alpha} = 2p\ cot\alpha$. Sustituyendo en la cartesiana de la parábola se tiene:

$$(2p\ cot\alpha)^2 = 4px$$

Donde: $x = \frac{4\,p^2\,cot^2\alpha}{4p} = p\,cot^2\alpha$

Las ecuaciones paramétricas de la parábola: $x = p\,cot^2\alpha, \;\; y = 2\,p\,cot\alpha$

La ecuación vectorial correspondiente, está dada por: $\bar{p} = (p\,cot^2\alpha)i + (2p\,cot\alpha)j + 0k$

3.1 Curvas en el espacio. Representación cartesiana, paramétrica y vectorial

Sean tres funciones reales de una variable real t, $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$, cuyos dominios son $\delta_1, \delta_2\; y\; \delta_3$ respectivamente. Entonces:

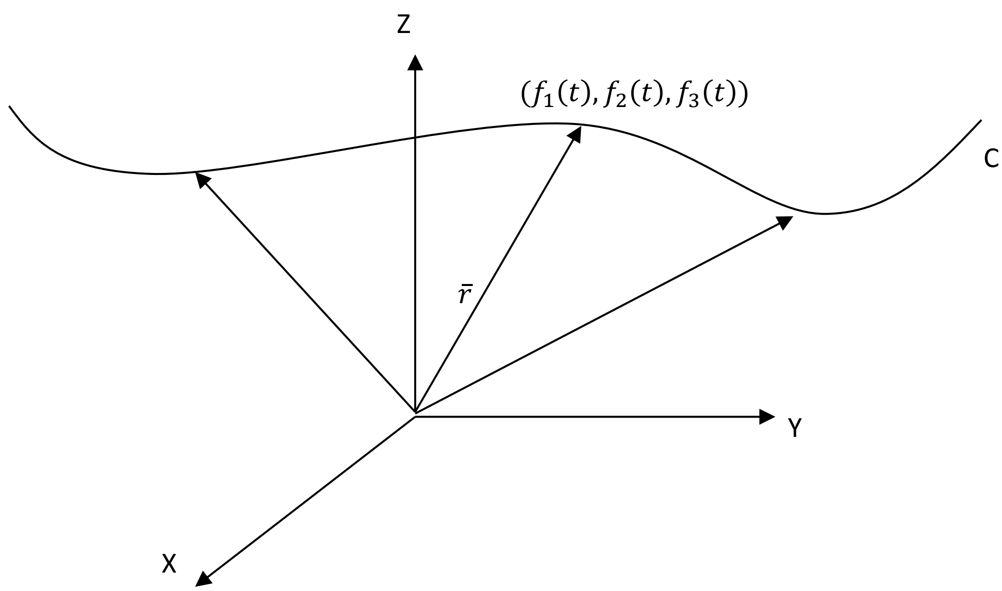
$$C = \{(x, y, z)|x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t); t \in \delta_1 \cap \delta_2 \cap \delta_3\}$$

Es un conjunto de ternas ordenadas con una gráfica en el sistema cartesiano.

Para todo número t en la intersección de $\delta_1, \delta_2\; y\; \delta_3$ existe un vector $\bar{r}$ definido por:

$$\bar{r} = f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k$$

Para cada valor de t, $\bar{r}$ definirá el vector de posición de un punto; cuando t toma todos los valores en la intersección de los dominios, el punto final de la representación de posición del vector $\bar{r}$ traza una curva C.



La ecuación:

$$\bar{r} = f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k$$

Es la ecuación vectorial de la curva C. Para curvas en situadas en el plano X, Y la componente dada por $f_3(t)$ es siempre cero.

Un punto de la curva C tiene la representación cartesiana (x, y, z) donde:

$$x = f_1(t), \;\; y = f_2(t), \;\;\; z = f_3(t)$$

Estas ecuaciones se llaman ecuaciones paramétricas de la curva C y a la variable t en función de las cuales están definidas las variables x, y, z, se llama parámetro.

Ejemplos:

$$C_1: \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \\ z = 5 \end{cases} \qquad C_2: \begin{cases} x = 2cos\theta + cos2\theta \\ y = 2sen\theta - sen2\theta \\ z = -1 \end{cases}$$

$$C_3: \begin{cases} x = 2sen2\theta + 2 \\ y = 3cos2\theta \\ z = 3 \end{cases} \qquad C_4: \begin{cases} x = \varphi - sen\varphi \\ y = 1 - cos\varphi \\ z = 4 \end{cases}$$