Dada la función $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3 \cdot x \cdot y$, encontrar los puntos críticos y determinar la naturaleza de cada uno de ellos. [Primer Exámen Final "A" 2004-2 Problema 1]

$f1 := x^3 + y^3 - 3 \cdot x \cdot y$

$$x^3 + y^3 - 3\,x\,y \tag{1}$$

Solución.
Obtención de los puntos críticos:

Primer derivada parcial respecto de 'x'.
$ec1 := diff(f1, x)$

$$3\,x^2 - 3\,y \tag{2}$$

Primer derivada parcial respecto de 'y'.
$ec2 := diff(f1, y)$

$$3\,y^2 - 3\,x \tag{3}$$

Resolución del sistema de ecuaciones:
$solve(\{ec1, ec2\}, \{x, y\})$

$$\{x = 0, y = 0\}, \{x = 1, y = 1\}, \{x = -1 - RootOf(\_Z^2 + \_Z + 1), y = RootOf(\_Z^2 + \_Z + 1)\} \tag{4}$$

$subs(x = 0, y = 0, f1)$

$$0 \tag{5}$$

$subs(x = 1, y = 1, f1)$

$$-1 \tag{6}$$

Criterio de la Segunda Derivada para determinar la naturaleza de los puntos críticos.

Segunda derivada parcial de *ec1* respecto de 'x'.
$diff(ec1, x)$

$$6\,x \tag{7}$$

Segunda derivada parcial de *ec2* respecto de 'y'.
$diff(ec2, y)$

$$6\,y \tag{8}$$

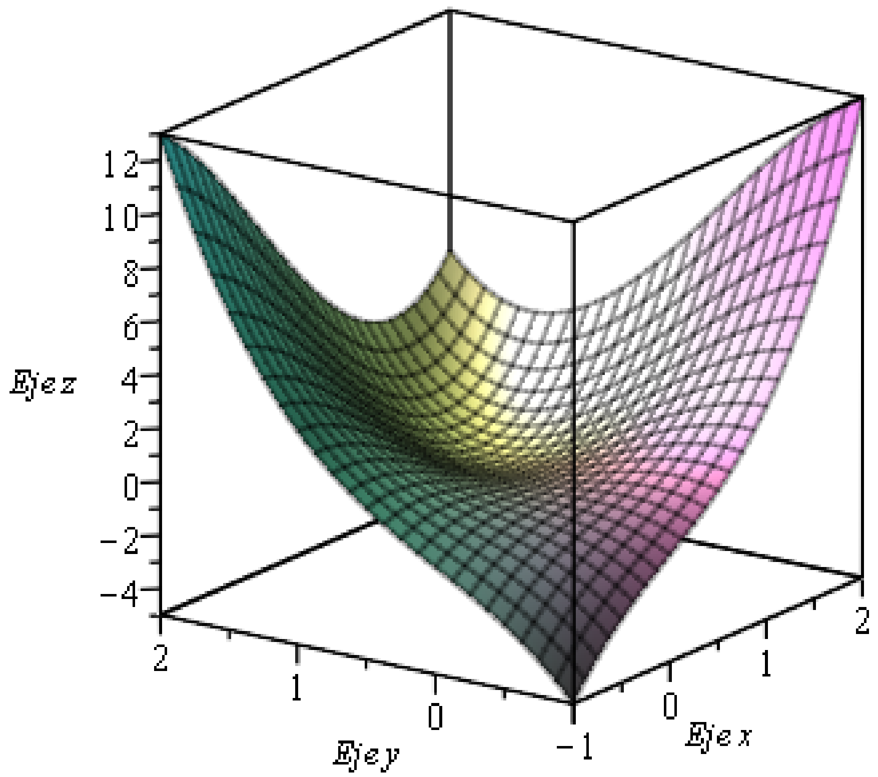
Segunda derivada parcial de *ec2* respecto de 'x'.
$diff(ec2, x)$

$$-3 \tag{9}$$

Se evalúa D(x,y) con las derivadas parciales para determinar la naturaleza del punto crítico.
D(x,y)=$F_{xx} * F_{yy} - (F_{xy})^2$

El valor del discriminante en cada punto crítico es $D_1 = -9$ *y* $D_2 = 36 - 9 = 27$, respectivamente, por lo que P_1 es un punto silla, mientras que P_2 es un mínimo debido a que la segunda derivada parcial respecto de 'x' es mayor a 0.

$g1 := plot3d(f1, x = -1..2, y = -1..2, labels = ['Eje\ x', 'Eje\ y', 'Eje\ z'])$


Eje z
12
10
8
6
4
2
0
−2
−4
2
1
0
Eje y
−1
0
1
2
Eje x