Teoría electromagnética

Líneas de transmisión

28 de mayo de 2022

Problema 44 Para una línea de transmisión:

a) Dibuja el esquema equivalente en términos de un circuito eléctrico de parámetros distribuídos, señalando la resistencia R, inductancia L, conductancia G y capacitancia C (todos por unidad de longitud Δz)

b) Usa las leyes de Kirchhoff y escribe las ecuaciones de los voltajes y las corrientes en dicho esquema.

c) Haz el límite $\Delta z \to 0$ y deduce las *ecuaciones del telégrafo* en términos del voltaje $v(z, t)$ y la corriente $i(z, t)$.

d) Supón una dependencia temporal de la corriente y el voltaje de forma *fasorial*, para reescribir las ecuaciones del inciso anterior en términos de dos ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas. Desacóplalas y resuelve para $V(z)$ e $I(z)$.
Nota: Recuerda que es útil definir la constante de propagación compleja y la impedancia característica, respectivamente, como

$$\gamma := \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$
$$Z_0 := \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

para poder escribir las soluciones de $V(z)$ e $I(z)$.

Problema 45 Para una línea de transmisión sin pérdidas terminada en **corto circuito**, utiliza la expresión de la impedancia de entrada deducida en clase

$$Z_{in} = \frac{Z_L + jZ_0 \tan\beta\ell}{Z_0 + jZ_L \tan\beta\ell} Z_0$$

para graficar el voltaje, la corriente y la impedancia como función de la posición z.

Problema 46 Para una línea de transmisión sin pérdidas terminada en **circuito abierto**, utiliza la expresión de la impedancia de entrada deducida en clase

$$Z_{in} = \frac{Z_L + jZ_0 \tan\beta\ell}{Z_0 + jZ_L \tan\beta\ell} Z_0$$

para graficar el voltaje, la corriente y la impedancia como función de la posición z.

Problema 47 Para una línea de transmisión sin pérdidas terminada con una **impedancia de carga arbitraria** Z_L, escribe la expresión de la impedancia de entrada Z_{in} cuando la línea de transmisión mide $\lambda/4$, y explica con tus palabras por qué se le llama a esta línea "transformador de lambda cuartos".

Problema 48 Dada una línea de transmisión de impedancia característica Z_0 y constante de propagación β, y una resistencia de carga R_L demuestra, usando el enfoque de las múltiples reflexiones, que no hay onda reflejada cuando se conecta entre éstas una línea de transmisión de longitud $\lambda/4$ y de impedancia característica $Z_1 = \sqrt{Z_0 R_L}$

Problema 49 Este problema tiene como propósito dibujar tu propia carta Smith.

a) Escribe la expresión para el coeficiente de reflexión en términos de las impedancias de carga y característica, y explica de manera cualitativa que su módulo es menor o igual a la unidad.

b) Escribe la misma expresión del inciso anterior en términos de la impedancia de carga *normalizada*, y nota como tanto Γ como z_L son números complejos. Despeja z_L y escribe las expresiones para su parte real r_L y su parte imaginaria x_L como funciones de Γ_r y Γ_i.

c) Reescribe las expresiones del inciso anterior de tal modo que se explicite el hecho de que representan circunferencias en el plano complejo, es decir, que dichas ecuaciones tengan la forma

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

y señala dónde está el centro y el valor del radio en cada caso (i.e. parte real y parte imaginaria).

d) Dibuja **tu propia carta Smith**, señalando las curvas para $r_L = 1$, $r_L = 2$, $r_L = 3$, $r_L \to \infty$, $r_L = 0.6$, $r_L = 0.2$, $r_L = 0$, $x_L = \pm 1$, $x_L = \pm 2$, $x_L = \pm 0.5$ y $x_L \to \infty$.

Problema 50 Utiliza una sola carta Smith[1] para encontrar el VSWR, el coeficiente de reflexión de voltaje Γ y la impedancia de entrada Z_{in} para una línea de transmisión con impedancia característica $Z_0 = 50\ \Omega$ de longitud $\ell = 0.3\lambda$ en los siguientes casos:

a) $Z_L = (100 - j100)\ \Omega$

b) $Z_L = (50 + j100)\ \Omega$

c) $Z_L = 50\ \Omega$

Problema 51 En la clase del 14 de mayo propusimos la expresión tipo onda de los campos eléctrico y magnético (ecuaciones (4.58)). Utilízalas para obtener las expresiones (4.61) y (4.62), y despeja las componentes en x, y de los campos para obtener las ecuaciones (4.66). Finalmente, utiliza la ley de Gauss eléctrica y magnética para obtener las ecuaciones de Helmholtz para $E_z(x, y)$ y $B_z(x, y)$ (ecuaciones (4.70) y (4.72)).

Problema 52 Suponiendo una guía de onda rectangular ($a > b$):

a) Encuentra la expresión de la componente del campo eléctrico en la dirección de propagación $E_z(x, y)$ para los modos TM, y muestra que la frecuencia de corte ω_{mn} es la misma que para el caso de los modos TE.

b) Usando el resultado del inciso anterior, calcula las expresiones de E_x, E_y, B_x y B_y para los modos TM.

c) Muestra que, si m o n son cero, los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ para las ondas TM se anulan, es decir, muestra que los modos TM_{00}, TM_{10}, TM_{01}, … no existen en la guía de onda rectangular.

d) Calcula la impedancia del modo Z_{mn}^{TM}.

e) Para una guía de onda rectangular con $a = 1.07\ cm$, $b = 0.43\ cm$, rellena de teflón ($\epsilon_r \simeq 2.08$ y $\mu \simeq \mu_0$), calcula en orden ascendente las 5 primeras frecuencias de corte (considerando tanto ondas TE como TM), indicando a qué modo corresponden.

[1] Puedes descargar el pdf dando click en este link.

Problema 53 Obtén la versión de las ecuaciones (4.66) en coordenadas cilíndricas circulares, y utilízalas para obtener la versión de las ecuaciones de Helmholtz para $\vec{E}(\rho, \phi, z, t)$ y $\vec{B}(\rho, \phi, z, t)$ en esas mismas coordenadas.

Problema 54 Suponiendo una guía de onda cilíndrica circular (de radio a):

a) Encuentra la expresión de la componente del campo eléctrico en la dirección de propagación $E_z(r, \phi)$ para las ondas TM, y muestra que la expresión para la frecuencia de corte de las ondas TM es

$$\omega_{nm} = c\frac{p_{nm}}{a} \tag{1}$$

donde p_{nm} es la raíz $m-$ésima de la función de Bessel de primer género $n-$ésima.

b) Usando el resultado del inciso anterior, calcula las expresiones de $E_r,\ E_\phi,\ B_r$ y B_ϕ para las ondas TM.

c) Calcula la impedancia del modo Z_{nm}^{TM}.

d) Para una guía de onda cilíndrica circular con $a = 1\ cm$, rellena de teflón ($\epsilon_r \simeq 2.08$ y $\mu \simeq \mu_0$), calcula en orden ascendente las 5 primeras frecuencias de corte (considerando tanto ondas TE como TM), indicando a qué modo corresponden[2].

e) Esboza la distribución del campo para el modo TM_{01}.

Problema extra Utiliza el método de series de potencias de Frobenius para encontrar una solución de la ecuación diferencial de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{2}$$

donde $\nu \in \mathbb{R}$ es una constante conocida.

$\LaTeX\, 2_\varepsilon$

[2]Las primeras raíces de las funciones $J_n(x)$ y $J_n'(x)$ las puedes consultar dando click aquí.