Teoría electromagnética

Ondas electromagnéticas y radiación

2 de mayo de 2022

Problema 31 Utiliza el tensor de esfuerzos de Maxwell $\overleftrightarrow{T}$ para calcular la fuerza neta que ejerce el "hemisferio sur" de una esfera sólida de radio R con carga total Q sobre el "hemisferio norte" de la misma esfera.

Problema 32 Calcula los coeficientes de reflexión y transmisión R y T, respectivamente, para el caso de una onda electromagnética que incide de manera normal sobre una interfaz entre dos medios de índices de refracción n_1 y n_2 (con permeabilidades magnéticas arbitrarias μ_1 y μ_2, i.e. sin suponer que $\mu_{1,2} \simeq \mu_0$), y prueba que $R + T = 1$.

Problema 33 En clase estudiamos las ondas electromagnéticas planas. En este problema se estudia lo mismo pero para ondas electromagnéticas esféricas. Supón que

$$\vec{E}(r, \theta, \phi, t) = A\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\left[\cos(kr - \omega t) - \frac{1}{kr}\operatorname{sen}(kr - \omega t)\right]\hat{\phi} \tag{1}$$

donde también[1] se cumple que $\omega = kc$. Suponiendo que no hay cargas ni corrientes:

a) Calcula la expresión de la componente magnética de la onda usando la ley de Faraday, y luego verifica que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ satisfacen el resto de las ecuaciones de Maxwell (en el vacío).

b) Calcula el vector de poynting $\vec{S}$ y promédialo en un ciclo completo para obtener la intensidad $\vec{I}$ (hint: asegúrate que $\vec{I}$ apunte en la dirección radial, y que ésta decaiga como el recíproco de r^2).

c) Integra $\vec{I} \cdot d\vec{a}$ en una superficie esférica de radio r para determinar la potencia total radiada (respuesta: $4\pi A^2/3\mu_0 c$).

Problema 34 Supón que $\forall x \in \mathbb{R}$, $Ae^{i\alpha x} + Be^{i\beta x} = Ce^{i\gamma x}$, y que $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ son constantes. Prueba que $\alpha = \beta = \gamma$ y que $A + B = C$.

Del **Problema 35** al **Problema 37** puedes suponer que, de manera aproximada, $\mu_1, \mu_2 \simeq \mu_0$.

Problema 35 Una onda electromagnética plana que viaja en un medio de índice de refracción n_1 incide de manera *oblicua* en un medio de índice de refracción n_2 ($n_1 \neq n_2$). Suponiendo que la interfaz entre ambos medios es plana, deriva las 3 leyes de la óptica geométrica.

Problema 36 En clase llegamos a que las ecuaciones de frontera para los campos eléctrico y magnético del **Problema 35** son

$$\begin{array}{llll} \textbf{(i')} & \epsilon_1\left(\vec{E}_{0I} + \vec{E}_{0R}\right)_z = \epsilon_2\left(\vec{E}_{0T}\right)_z & \textbf{(ii')} & \left(\vec{B}_{0I} + \vec{B}_{0R}\right)_z = \left(\vec{B}_{0T}\right)_z \\ \textbf{(iii')} & \left(\vec{E}_{0I} + \vec{E}_{0R}\right)_{x,y} = \left(\vec{E}_{0T}\right)_{x,y} & \textbf{(iv')} & \frac{1}{\mu_1}\left(\vec{B}_{0I} + \vec{B}_{0R}\right)_{x,y} = \frac{1}{\mu_2}\left(\vec{B}_{0T}\right)_{x,y} \end{array} \tag{2}$$

donde $\vec{B}_0 = \frac{1}{v}\hat{k} \times \vec{E}_0$ en cada caso.

[1] Ésta es la forma más simple de una onda esférica. Como recomendación, realiza tus cálculos usando $u := kr - \omega t$.

a) Suponiendo que la polarización de la onda incidente es **paralela** al Plano de Incidencia, deduce las ecuaciones de Fresnel (i.e. las expresiones de las amplitudes del campo eléctrico para la onda reflejada y la onda transmitida como función de la amplitud del campo eléctrico de la onda incidente).

b) Obtén la expresión para el ángulo de incidencia en el que **no** hay onda reflejada, y muestra que dicha expresión se reduce de manera aproximada a la expresión empírica usada en óptica geométrica $\tan\theta_B \simeq \frac{n_2}{n_1}$.

c) Definiendo la intensidad de la onda como

$$I = \left\langle \vec{S} \cdot \hat{z} \right\rangle = \frac{1}{2}\epsilon v E_0^2 \cos\theta \tag{3}$$

calcula los coeficientes de Reflexión y Transmisión dados por

$$R := \frac{I_R}{I_I} \qquad T := \frac{I_T}{I_I} \tag{4}$$

como función de los ángulos y de las características de ambos materiales, y muestra que, en general, $R + T = 1$.

Problema 37 Partiendo del sistema del **Problema 35** (i.e. se siguen cumpliendo las condiciones de frontera (2)),

a) Supón que la polarización de la onda incidente es **perpendicular** al Plano de Incidencia, deduce las ecuaciones de Fresnel.

b) Muestra que para esta polarización, **no** hay ángulo incidente para el cual la onda reflejada se anule para n_1 y n_2 arbitrarios.

c) Calcula los respectivos coeficientes de Reflexión y Transmisión (ecuación (4)) y muestra que, nuevamente, $R + T = 1$.

Problema 38 *a*) Muestra que la profundidad del "efecto piel" (d) para un **mal** conductor (i.e. $\sigma << \omega\epsilon$) es $(2/\sigma)\sqrt{\epsilon/\mu}$, es decir, la profundidad es independiente de la frecuencia. Calcula la profundidad del efecto piel para el agua pura[2].

b) Muestra que la profundidad del efecto piel para un **buen** conductor (i.e. $\sigma >> \omega\epsilon$) es $\lambda/2\pi$, donde λ es la longitud de onda *adentro del conductor*. Calcula la profundidad del efecto piel para: (i) Aluminio, (ii) Cobre, (iii) Plata y (iv) Oro, en el rango de frecuencias de luz visible ($\omega \simeq 10^{15} rad/s$) ¿Cómo explicas que los metales son opacos?

Problema 39 *a*) Usando las ecuaciones de Maxwell, obtén las expresiones de los campos $\vec{E}(\vec{r},t)$ y $\vec{B}(\vec{r},t)$ en términos de los potenciales escalar $V(\vec{r},t)$ y vectorial $\vec{A}(\vec{r},t)$

b) Obtén las ecuaciones diferenciales de dichos potenciales, y muestra que

$$\square^2 V + \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \tag{5}$$

$$\square^2 \vec{A} - \nabla L = -\mu_0 \vec{J} \tag{6}$$

donde $\square^2$ es el operador *D'Alembertiano* y $L \equiv \nabla \cdot \vec{A} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$

[2] Recuerda que el agua pura se comporta eléctricamente como *aislante*, es decir es un mal conductor de la electricidad.

Problema 40 Muestra que, en la norma de Lorentz, las ecuaciones (7) y (8) tienen solución, respectivamente, dada por las ecuaciones

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{\mathscr{r}}\,d\tau' \tag{7}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t_r)}{\mathscr{r}}\,d\tau' \tag{8}$$

Hint: Sólo es necesario probarlo para V. Justifica con tus palabras cómo $\vec{A}$ satisface su propia ecuación usando el método de Green.

Problema 41 Un cable infinito tiene una corriente

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ I_0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

a) Obtén los potenciales retardados $V(r,t)$ y $\vec{A}(r,t)$ a una distancia r del cable.

b) Utiliza el inciso anterior para calcular los campos $\vec{E}(r,t)$ y $\vec{B}(r,t)$.

c) Calcula el límite $t \to \infty$ y compara los resultados en dicho límite con el caso estático.

Problema 42 Utiliza las expresiones generales de los potenciales retardados (en la norma de Lorentz) para obtener las *ecuaciones de Jefimenko*, y utilízalas para explicar por qué la radiación electromagnética se origina de fuentes (i.e. densidades de carga y corriente) que varían en el tiempo.

Problema 43 Una *antena dipolar* se puede modelar a partir de dos cargas $+q_0$ y $-q_0$ colocadas a lo largo del eje z separadas inicialmente una distancia d (como se observa la figura) que se mueven de manera oscilatoria con frecuencia angular ω a través de la función

$$q(t) = q_0\cos(\omega t) \tag{9}$$

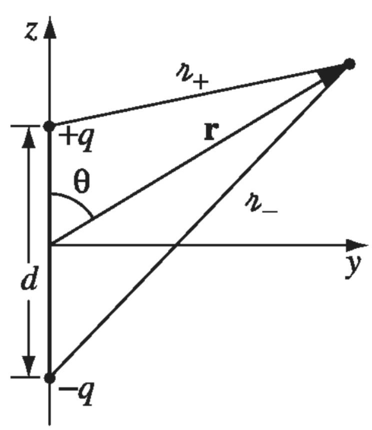

FIGURE 11.2

a) Calcula el potencial escalar $V(\vec{r}, t)$ y simplifícalo usando las aproximaciones $d \ll \lambda \ll r$.

b) Calcula el potencial vectorial $\vec{A}(\vec{r}, t)$ y simplifícalo usando las aproximaciones $d \ll \lambda$ y $\lambda \ll r$. Indica qué aproximación usaste siempre que elimines un término.

c) Usa ambos potenciales para calcular $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en coordenadas esféricas polares.

d) Calcula el vector de Poynting $\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$.

e) Obtén el promedio en una oscilación completa del vector de Poynting $\langle \vec{S} \rangle$.

f) Usa el vector de Poynting para calcular $P_{\text{rad}} = \int \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{a}$ para una esfera de radio r centrada en el origen.

g) Grafica $\langle S \rangle$ (asegúrate de obtener la figura 11.4 del Griffiths), incluyendo tu código.

Punto extra: Un modelo tentador del origen del *spin* del electrón es el de una esfera hueca de radio R con carga e que gira a una velocidad angular $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$ constante. Utilizando la teoría de la relatividad especial, Lorentz y otros especularon que la masa del electrón debe ser tal que

$$u_{em} = m_e c^2 \tag{10}$$

Asimismo, de la mecánica cuántica, el spin del electrón es múltiplo entero de $\hbar/2$, por lo que si este tiene origen en el momento angular almacenado en los campos electromagnéticos que el electrón genera al girar, debería cumplirse que

$$L_{em} = \frac{\hbar}{2} \tag{11}$$

a) Utiliza las suposiciones (10) y (11) para calcular el radio R y la velocidad angular ω del electrón sabiendo que la energía almacenada en los campos eléctrico y magnético debidos a una esfera hueca de radio R cargada con carga Q que gira a una velocidad angular $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$ es

$$u_{em} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{R} + \frac{\mu_0}{36\pi}Q^2\omega^2 R$$

y que el momento angular de dichos campos es

$$\vec{L}_{em} = \frac{\mu_0 Q^2 \omega R}{18\pi}\hat{z}$$

b) Calcula el producto ωR y justifica si el modelo tiene sentido o no.