Teoría electromagnética

Repaso y ecuaciones de Maxwell

24 de marzo de 2022

Problema 1 Calcula las siguientes expresiones:

a) $\nabla(r^n)$

b) $\nabla \cdot (r^n \hat{r})$

c) $\nabla \times (r^n \hat{r})$

donde $n \in \mathbb{Z}$ es constante.

Problema 2 Demuestra la identidad

$$\int_{\mathcal{V}} (\nabla \times \vec{v}) d\tau = -\oint_{\mathcal{S}} \vec{v} \times d\vec{a}$$

Hint: Substituye $\vec{v}$ por $\vec{v} \times \vec{c}$ (con $\vec{c}$ un campo vectorial constante) en el teorema de la divergencia y haz álgebra.

Problema 3 Encuentra el campo eléctrico a una distancia z exactamente sobre el punto medio entre dos cargas de signo opuesto separadas por una distancia d (ver figura 1).

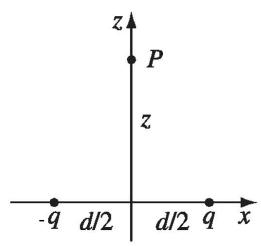

Figura 1: Configuración para el **Problema 3**.

Problema 4 Encuentra el campo eléctrico a una distancia z de una línea de carga infinita uniformemente distribuida con densidad lineal de carga λ.

Problema 5 Calcula el campo eléctrico a una distancia z encima del centro de una línea de carga de longitud $2L$ (ver figura 2) con densidad lineal constante λ. Revisa que tu resultado sea consistente en los casos

a) $z >> L$, y

b) $L \to \infty$ (**Problema 4**).

Problema 6 Calcula el campo eléctrico a una distancia z por encima del centro de un "anillo cuadrado" de lado a cargado con densidad lineal λ constante (como se muestra en la figura 3).

Problema 7 Calcula el campo eléctrico a una distancia z por encima del centro de un anillo de radio R (como se muestra en la figura 4) con densidad lineal constante λ. Revisa tu resultado en el límite cuando $z >> R$ y comprueba que "desde muy lejos" el anillo se ve como una partícula de carga $2\pi R\lambda$.

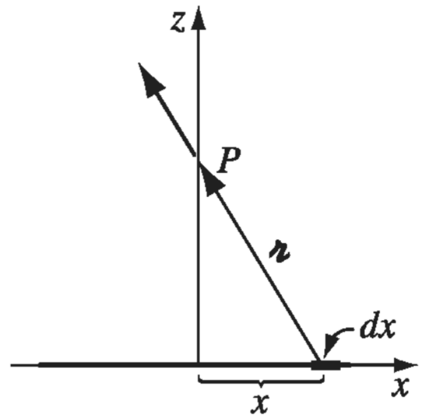

Figura 2: Configuración para el **Problema 5**.

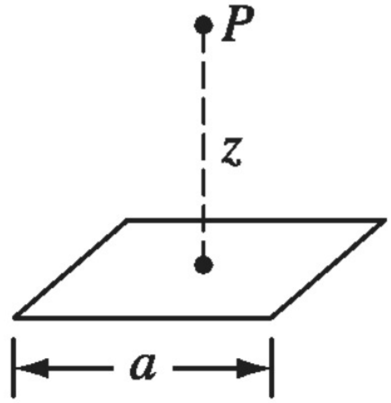

Figura 3: Configuración para el **Problema 7**.

Problema 8 Calcula el campo eléctrico a una distancia z por encima del centro de un disco de radio R (como se muestra en la figura 5) con densidad superficial constante σ. Revisa tu resultado en los límites cuando

a) $R \to \infty$ (i.e. el disco se vuelve un plano infinito), y

b) $z >> R$ (i.e. el disco se ve como una partícula).

Problema 9 Utiliza la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico adentro y afuera de una esfera sólida de radio R cargada con densidad volumétrica de carga ρ constante. Grafica la dependencia del campo eléctrico como función de la distancia respecto al centro de la esfera.

Problema 10 Utiliza la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico adentro y afuera de un cilindro muy largo de sección transversal circular de radio R cargado con densidad volumétrica de carga ρ constante. Grafica la dependencia del campo eléctrico como función del radio respecto al eje del cilindro.

Problema 11 Un plano infinito está cargado con una densidad superficial de carga σ constante. Utiliza la Ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico.

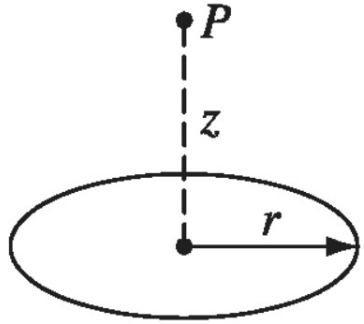

Figura 4: Configuración para el **Problema 7**.

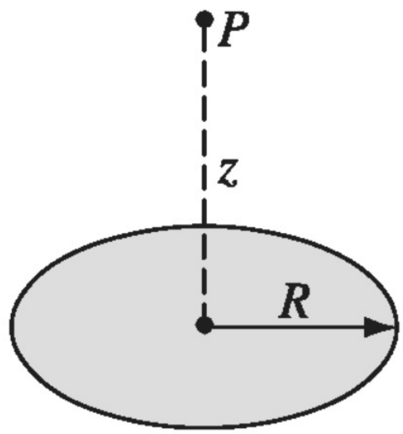

Figura 5: Configuración para el **Problema 8**.

Problema 12 Un cilindo largo y sólido tiene densidad volumétrica de carga que es proporcional a la distancia respecto a su eje (i.e. $\rho = kr$, para alguna constante positiva k). Utiliza la ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico adentro del cilindro.

Problema 13 Un cascarón esférico "grueso" porta una densidad de carga volumétrica

$$\rho = \frac{k}{r^2} \text{ donde } a \leq r \leq b$$

Encuentra el campo eléctrico en las tres regiones

a) $r < a$,

b) $a \leq r < b$, y

c) $r > b$

y grafica la magnitud del campo para el caso en que $b = 2a$.

Problema 14 Un cable coaxial largo está cargado con una densidad volumétrica de carga ρ constante en el cilindro interno (de radio a), y con una densidad superficial de carga σ constante en el cilindro externo (de radio b) como se muestra en la figura 6. Las densidades de carga son escogidas de tal manera que la densidad superficial *neutraliza* la carga del cilindro interno (i.e. σ es negativa y la carga neta de todo el cable es cero). Encuentra el campo eléctrico en las tres regiones:

a) Adentro del cilindro interno (i.e. $r < a$),

b) en la región entre los cilindros (i.e. $a < r < b$), y

c) afuera del cilindro externo (i.e. $b < r$).

Grafica cómo cambia la magnitud del campo como función de la distancia.

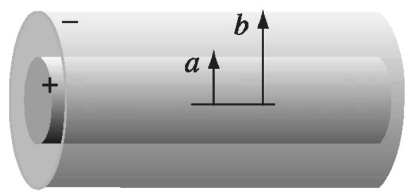

Figura 6: Arreglo para el **Problema 14**.

Problema 15 Calcula el potencial electrostático a una distancia z encima del centro de una línea de carga de longitud $2L$ (ver figura 2) con densidad lineal constante λ. Revisa que tu resultado sea consistente con el **Problema 5**.

Problema 16 Calcula el potencial electrostático a una distancia z por encima del centro de un disco de radio R (como se muestra en la figura 5) con densidad superficial constante σ. Verifica que tu resultado sea consistente con el **Problema 8**.

Problema 17 Calcula el potencial electrostático de un cascarón esférico de radio R *uniformemente* cargado con una densidad de carga σ constante adentro y afuera del cascarón. Calcula el campo eléctrico usando la ley de Gauss y confirma que tu resultado es consistente con lo que se dijo en clase.

Problema 18 Calcula el potencial electrostático de una esfera sólida de radio R *uniformemente* cargada con una densidad de carga ρ constante adentro y afuera de la esfera. Calcula el campo eléctrico y confirma que tu resultado es consistente con el **Problema 9**.

Problema 19 Calcula la capacitancia de dos placas metálicas rectangulares planas paralelas de área A, separadas una distancia d una de otra.

Problema 20 Calcula la capacitancia *por unidad de longitud* de dos cilindros coaxiales metálicos de radios a y b ($a < b$) cargados con cargas $+Q$ y $-Q$, respectivamente.

Problema 21 Calcula la capacitancia de dos esferas metálicas concéntricas de radios a y b ($a < b$) cargados con cargas $+Q$ y $-Q$, respectivamente.

Problema 22 Calcula la fuerza neta que ejerce el hemisferio sur de una esfera sólida de radio R cargada uniformemente con carga total Q sobre el hemisferio norte de dicha esfera. [*Respuesta*: $(1/4\pi\epsilon_0)(3Q^2/16R^2)$]. Este es el único problema del curso en donde se vale eliminar términos por simetría.

Problema 23 Utiliza la ley de Biot-Savart para calcular el campo magnético a una distancia r de un cable infinitamente largo que porta una corriente constante I.

Problema 24 Utiliza la ley de Biot-Savart para calcular explícitamente[1] el campo magnético a una altura z del centro de un anillo circular de radio R con corriente I (ver figura 7).

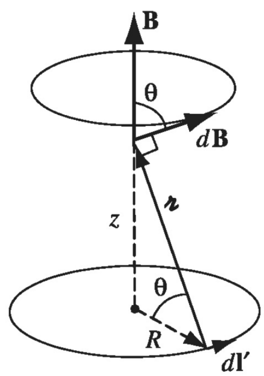

Figura 7: Configuración para el **Problema 24**.

Problema 25 Calcula el campo magnético en el punto P de la configuración mostrada en la figura 8, considerando que la corriente I es estacionaria.

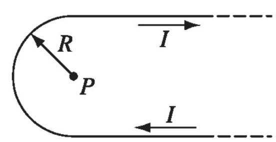

Figura 8: Configuración para el **Problema 25**.

Problema 26 Como viste en el problema **Problema 24**, el campo magnético a una altura z a lo largo del eje de un anillo circular con corriente I no es para nada constante. Sin embargo, si se pone una segunda espira a una distancia d como se muestra en la figura 9 el campo se vuelve bastante más uniforme en la región entre ambas espiras.

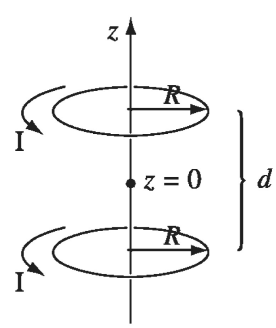

Figura 9: Configuración para el **Problema 26**.

[1]No se vale en este problema despreciar términos por argumentos "de simetría", *i.e.* calcula todas las integrales.

a) Calcula el campo como función de la posición z y muestra que $\partial\vec{B}/\partial z$ se anula en $z = 0$.

b) Se puede elegir d de tal manera que $\partial^2\vec{B}/\partial z^2$ también sea cero en $z = 0$. A esta configuración se le llama *bobina de Helmholtz*, y son útiles para construir experimentalmente campos magnéticos relativamente uniformes. Determina el valor de d de tal manera que la segunda derivada también se anule, y da el campo B para esa d en el punto $z = 0$.

Problema 27 Calcula el potencial vectorial magnetostático afuera y adentro de un cascarón esférico de radio R cargado superficialmente de manera uniforme con densidad de carga σ el cual se encuentra girando a una velocidad angular constante $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$, y calcula el campo magnetostático adentro del cascarón.

Problema 28 Calcula el campo magnético adentro de un cascarón esférico magnetizado uniformemente con campo de magnetización $\vec{M}$.

Problema 29 Un disco de metal de radio a gira con velocidad angular constante ω alrededor de un eje vertical, en una región con campo magnético $\vec{B}$ uniforme que apunta hacia arriba. Un circuito se arma de tal manera que un extremo de una resistencia R hace contacto (sin fricción) con la orilla del disco, y el otro extremo de la resistencia hace contacto con el centro del disco (ver figura 10). Calcula la corriente que circula por la resistencia.

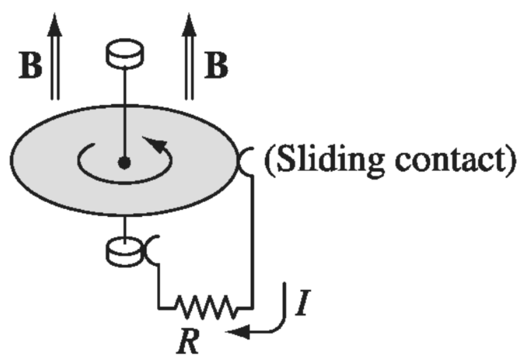

Figura 10: Configuración para el **Problema 29**.

Problema 30 Una barra de metal de masa m se desliza sin fricción sobre dos rieles metálicos paralelos separados por una distancia ℓ como se observa en la figura 11. Una resistencia R se conecta en el extremo de los rieles, cerrando el circuito, y se coloca todo el arreglo en una región de campo magnético $\vec{B}$ que apunta hacia adentro de la página.

a) Si la barra se mueve hacia la derecha con velocidad constante v, ¿cuál es la corriente en la resistencia, y en qué dirección circula?

b) ¿Cuál es la fuerza magnética (magnitud y dirección) sobre la barra?

c) Si la barra inicia con velocidad inicial v_0 hacia la derecha en $t = 0$ y se deja deslizar libremente, ¿cuál es la velocidad en el tiempo t?

d) La energía inicial del sistema es $\frac{1}{2}mv_0^2$. Revisa que la energía entregada a la resistencia es $\frac{1}{2}mv_0^2$, es decir, se conserva la energía en el sistema.

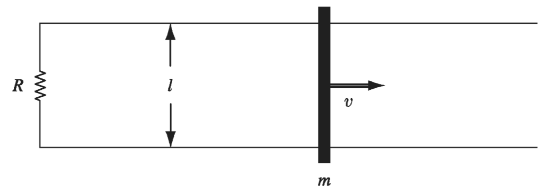

Figura 11: Configuración para el **Problema 30**.

Punto extra: Para la configuración del **Problema 27**, calcula el campo magnético afuera de la esfera y escríbelo en términos del momento dipolar magnético para obtener

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\left[3(\vec{m}\cdot\hat{r}) - \vec{m}\right]$$