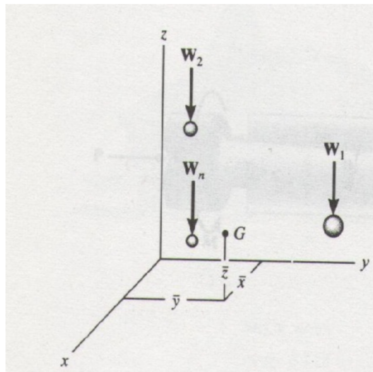
CENTRO DE GRAVEDAD Y CENTROIDE

Centro de gravedad y centro de masa para un sistema de partículas

Centro de gravedad

Considerando el sistema de n partículas fijo dentro de una región del espacio,



Los pesos de las partículas consisten en un sistema de fuerzas paralelas que se puede sustituir por un solo peso resultante (equivalente) y un punto definido de aplicación. Este punto es llamado centro de gravedad G. Por lo que

$$W_R = \sum W$$

La suma de los momentos de los pesos de todas las partículas en torno a los ejes x,y,z es igual al momento del peso resultante alrededor de estos ejes. Así, para determinar la coordenada x de G, podemos sumar momentos en torno al eje y.

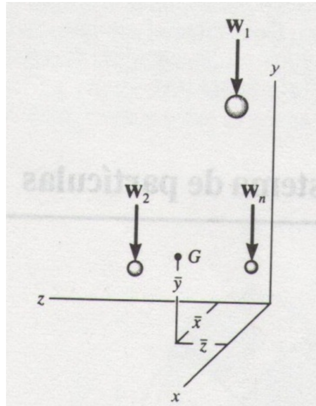
$$\overline{x}\,W_R = \tilde{x}_1\,W_1 + \tilde{x}_2\,W_2 + \cdots + \tilde{x}_n\,W_n$$

Asimismo, sumando momentos en torno al eje x, podemos obtener la coordenada y; es decir,

$$\overline{y}\,W_R = \tilde{y}_1\,W_1 + \tilde{y}_2\,W_2 + \cdots + \tilde{y}_n\,W_n$$

Aunque los pesos no producen momento en torno al eje z, podemos obtener la coordenada z de G imaginando el sistema de coordenadas sometido a una rotación de 90^0 respecto al eje x (o y) con las partículas fijas en él. Sumando momentos en torno del eje x, tenemos

$$\overline{z}\,W_R = \tilde{z}_1\,W_1 + \tilde{z}_2\,W_2 + \cdots + \tilde{z}_n\,W_n$$



Podemos generalizar estas fórmulas y escribirlas simbólicamente en la forma

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x}\, W}{\sum W} \qquad \bar{y} = \frac{\sum \tilde{y}\, W}{\sum W} \qquad \bar{z} = \frac{\sum \tilde{z}\, W}{\sum W} \qquad (1)$$

Centro de masa

Para estudiar problemas relativos al movimiento de la materia bajo la influenza de la fuerza, es decir, la dinámica, es necesario localizar un punto llamado el centro de masa. Siempre que la aceleración de la gravedad g para cada partícula sea constante, se considera que w = mg. Al sustituir en las ecuaciones (1) y cancelar g se tendrá

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x}\; m}{\sum m} \qquad \bar{y} = \frac{\sum \tilde{y}\, m}{\sum m} \qquad \bar{z} = \frac{\sum \tilde{z}\, m}{\sum m} \qquad (2)$$

Entonces, por comparación, la localización del centro de gravedad coincide con la del centro de masa. Recuerde, sin embargo, que las partículas tienen "peso" sólo cuando se encuentran bajo la influencia de una atracción gravitacional, en tanto que el centro de masa es independiente de la gravedad.

Centro de gravedad

Cuando los principios para determinar las ecuaciones xxx se aplican a un sistema de partículas que componen un cuerpo rígido, se obtiene la misma forma que estas ecuaciones, salvo que cada partícula localizada en (x,y,z)) se considera de un peso diferencial dW. En consecuencia, se requiere integración en vez de suma discreta de los términos. Las ecuaciones que resultan son

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\;\, dW}{\int dW} \qquad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\;\, dW}{\int dW} \qquad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z}\;\, dW}{\int dW} \qquad (3)$$

Para usar apropiadamente estas ecuaciones, el peso diferencial dW debe expresarse en términos de su volumen asociado dV. Si γ representa el peso específico del cuerpo, medido como peso por unidad de volumen, entonces dW= γ dV, por tanto,

$$\overline{x} = \frac{\int \tilde{x}\ \gamma\, dV}{\int \gamma\, dV} \qquad \overline{y} = \frac{\int \tilde{y}\, \gamma\, dV}{\int \gamma\, dV} \qquad \overline{z} = \frac{\int \tilde{z}\, \gamma\, dV}{\int \gamma dV} \qquad (4)$$

Centro de masa

La densidad ρ o masa por unidad e volumen, se relaciona con γ mediante la ecuación $\gamma=\rho$ g donde g es la aceleración de la gravedad. Al sustituir esta relación en las ecuaciones(4) se obtendrán ecuaciones similares (reemplazando ρ por γ) que podrán usarse para determinar el centro de masa del cuerpo.

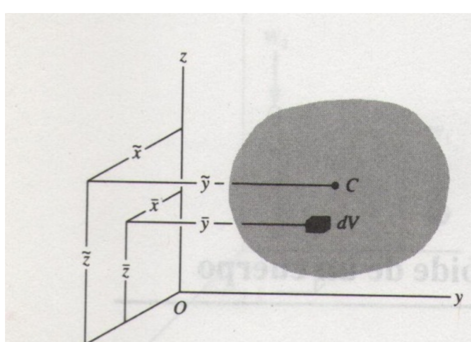
Centroide.

Es un punto que define el centro geométrico de un objeto. Su localización puede determinarse a partir de fórmulas semejantes a las utilizadas para determinar el centro de gravedad o el centro de masa del cuerpo. En particular, si el material de que esta compuesto un cuerpo es uniforme u homogéneo, la densidad o el peso específico serán constantes en todo el cuerpo. Las fórmulas resultantes definen el centroide de un cuerpo, ya que son independientes del peso del cuerpo y dependen solamente del cuerpo. Se considerarán tres casos específicos.

Volumen

Si un objeto se subdivide en elementos de volumen dV, la localización del centroide $C\ (\overline{x},\ \overline{y},\ \overline{z})$ para el volumen del objeto se puede determinar calculando los "momentos" de los elementos en torno a los ejes de coordenadas. Las fórmulas que resultan son

$$\overline{x} = \frac{\int \tilde{x}\ \ dV}{\int\ dV} \qquad \overline{y} = \frac{\int \tilde{y}\ dV}{\int\ dV} \qquad \overline{z} = \frac{\int \tilde{z}\ dV}{\int dV} \qquad (5)$$

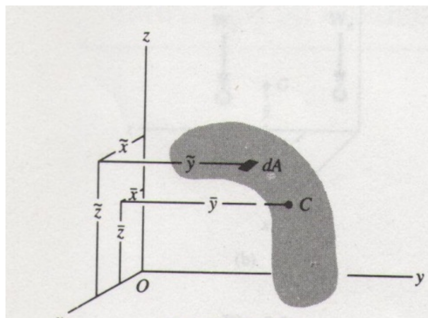


centroide de un volumen

Área

De manera semejante, el centroide para el área superficial de un boleto, como una placa o un casco puede encontrarse subdividiendo el área en elementos diferenciales dA y calculando los "momentos" de estos elementos de área en torno a los ejes de coordenadas, a saber

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} \; dA}{\int \; dA} \qquad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} \; dA}{\int \; dA} \qquad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z} \; dA}{\int dA} \qquad (6)$$

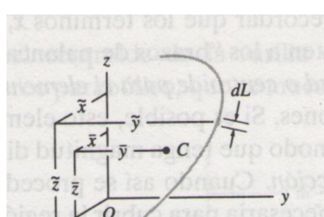


centroide de un área

Línea

Si la geometría del objeto, tal como una barra delgada o un alambre, toma la forma de una línea, la manera de encontrar su centroide es idéntica al procedimiento antes explicado. Los resultados son

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} \; dL}{\int \; dL} \qquad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} \; dL}{\int \; dL} \qquad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z} \; dL}{\int dL} \qquad (7)$$



centroide de una línea

En todos los casos anteriores la localización de **C** no necesariamente estará dentro del objeto; sino que puede situarse en el espacio del exterior del objeto. También, los centroides de algunas formas pueden especificarse parcial o completamente usando condiciones de simetría.

En los casos en que la forma tiene un eje de simetría, el centroide de la forma estará a lo largo del eje