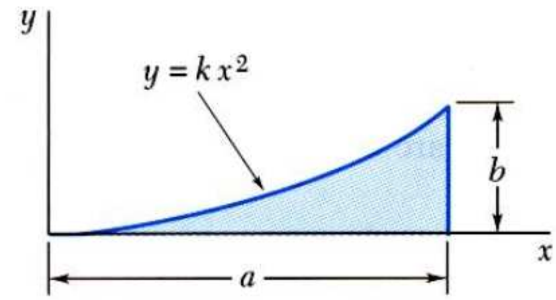
Centroides por integración

El centroide de un área limitada por curvas analíticas (curvas definidas por ecuaciones algebraicas) por lo general se determina evaluando las integrales

$$\bar{x}\, A = \int x \;\; dA \qquad\qquad \bar{y}\, A = \int y \;\; dA$$

Ejemplo: Determinar el centroide de la figura mostrada.

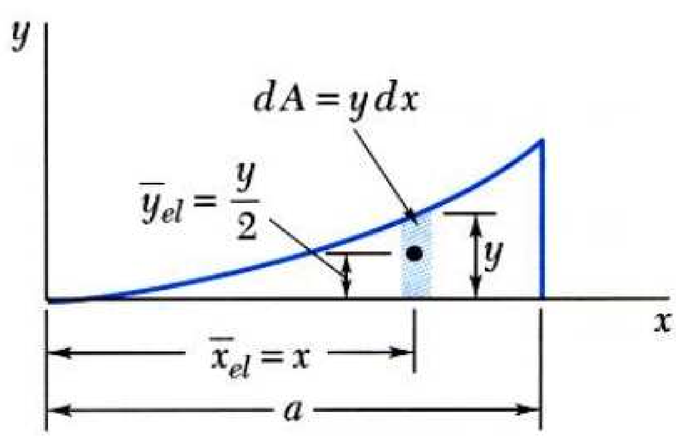


- determinando el valor de la constante k

sustituimos $x = a$ e $y = b$ en la ecuación dada

$$b = k\, a^2 \qquad \text{por lo que} \qquad k = \frac{b}{a^2}$$

al seleccionar el elemento diferencial mostrado para determinar el área total de la figura, tenemos



$$A = \int dA = \int_0^a y dx =$$

$$= \int_0^a \frac{b}{a^2} x^2 dx =$$

$$= \left[\frac{b}{a^2} \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{ab}{3}$$

$x_{el}\ dA$ es el primer momento del elemento diferencial con respecto al eje ***y***
.

Por lo tanto el **primer momento de toda el área** con respecto al eje ***y***

$$Q_y = \int x_{el}\ dA = \int_0^a x\ ydx = \int_0^a x\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)dx = \left[\frac{b}{a^2}\frac{x^4}{4}\right]_0^a = \frac{a^2b}{4}$$

como $Q_y = \bar{x}A$ tenemos $\bar{x}\ A = \int x_{el}\ dA$ por lo que

$$\bar{x}\left(\frac{ab}{3}\right) = \frac{a^2b}{4} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{3}{4}a$$

de la mismo modo, e primer momento del elemento diferencial con respecto al eje ***x*** es $y_{el}\ dA$ y el primer momento de toda el área es

$$Q_x = \int y_{el}\ dA = \int_0^a \frac{y}{2}\ ydx = \int_0^a \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)^2 dx = \left[\frac{b^2}{2a^4}\frac{x^5}{5}\right]_0^a = \frac{ab^2}{10}$$

como $Q_x = \bar{y}A$ tenemos $\bar{y}\ A = \int y_{el}\ dA$ por lo que

$$\bar{y}\left(\frac{ab}{3}\right) = \frac{ab^2}{10} \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = \frac{3}{10}b$$

Tarea: Resuelva el problema, determinando un elemento diferencial horizontal. ¿Qué concluye?