

Ecuaciones Diferenciales

Definición de Ecuación diferencial.

A toda igualdad que relaciona a una función desconocida o variable dependiente con sus variables independientes y sus derivadas se le conoce como ecuación diferencial.

Clasificación de Ecuaciones diferenciales en ordinarias o parciales.

Ecuación Diferencial Ordinaria (**EDO**); $f(x, y, y'', y''' \dots y^n) = 0$

Ecuación Diferencial Parcial (**EDP**); $f\left(x, y, z, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \dots\right) = 0$

Definición de Solución de una Ecuación Diferencial.

Una función $y(x)$ o variable dependiente es solución de una ecuación diferencial si al sustituir en ella se satisface la identidad.

Tipos de soluciones:

- **General** (Familia de Soluciones)
- **Particular de la general** (Una solución que se obtiene de la familia de soluciones evaluando condiciones iniciales)
- **Singular** (No puede obtenerse de una solución general dándole valores específicos a los parámetros)

Definición de orden de una ecuación diferencial.

Es el de la derivada mayor que aparece en dicha ecuación.

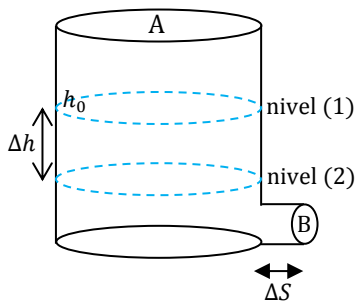
Definición de grado de una ecuación diferencial.

Es el exponente o potencial a la que está elevada la derivada de mayor orden.

Nota: Las ecuaciones diferenciales representan un modelo físico.

Ejemplos de aplicación.

1. En el tiempo inicial ($t_0 = 0$) el contenedor de agua que se muestra en la siguiente figura tiene una altura inicial h_0 . En ese mismo instante se abre la llave en el orificio B. Nos interesa obtener un modelo matemático para conocer la altura h para cualquier instante de tiempo t , es decir una función $h(t)$.



Modelo matemático (E.D.O):

$$s = -A\Delta h \quad \text{Modelo matemático}$$

Dividiendo entre Δt y obteniendo el $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} B \frac{\Delta s}{\Delta t} = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} A \frac{\Delta h}{\Delta t}$$

Sustituyendo $\frac{ds}{dt} = v$ en la expresión anterior:

$$B \frac{ds}{dt} = -\frac{Adh}{dt}$$
$$= Bv = -A \frac{dh}{dt} \dots (A)$$

Por otro lado, recordando que la energía potencial igual a energía cinética:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \dots (B)$$

Despejando v de (B)

$$v = \sqrt{2gh} \dots (C)$$

Sustituyendo (C) en (A):

$$-A \frac{dh}{dt} = B\sqrt{2gh} \quad ; \quad \text{Ecuación Diferencial Ordinaria (modelo matemático)}$$

Resolución de la ecuación diferencial.

Separando variables:

$$-A \frac{dh}{\sqrt{h}} = B \sqrt{2g} dt$$
$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{B}{A} \sqrt{2g} dt$$
$$h(t) = h(t = t_o = 0) = h_o$$

Integrando:

$$\int h^{-\frac{1}{2}} dh = -\int \frac{B}{A} \sqrt{2g} dt$$
$$2\sqrt{h(t)} = -\frac{B}{A} \sqrt{2g} t + C \quad ; \quad \text{Solución general (Familia de soluciones)}$$

Evaluyendo la expresión anterior para $t = 0$ y conociendo $h(t_0 = 0) = h_0$:

$$2\sqrt{h_0} = C$$

$\therefore$ Solución particular (de la ecuación general)

$$2\sqrt{h(t)} = -\frac{B}{A} \sqrt{2g} t + 2\sqrt{h_0}$$

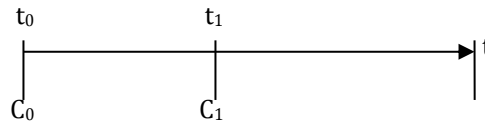
Igualando $h(t) = 0$ cuando ya no existe líquido:

$$0 = -\frac{B}{A} \sqrt{2g}t + 2\sqrt{h_0}$$

Despejando t

$$t = \frac{2A\sqrt{h_0}}{B\sqrt{2g}} \quad \text{Tiempo de vaciado}$$

2. Originalmente tenemos un capital inicial C_0 y el banco ofrece una tasa de interés "i". Obtener el capital $C(t)$ para cualquier tiempo.



Obtención del modelo matemático:

Se tiene como dato $C(t) = C_0$ que es parte de la solución

$$\frac{dC(t)}{dt} = iC(t)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = iC(t) \quad ; \quad \text{Ecuación diferencial (modelo matemático)}$$

Separando variables (variable dependiente e independiente con sus respectivas diferenciales) e integrando:

$$\int \frac{dC(t)}{C(t)} = \int i dt; \quad \ln|C(t)| + it + C_2; \quad C_2 - C_1 = C$$

$$\ln|C(t)| = it + C \rightarrow \text{Determinar por condiciones iniciales}$$

Obteniendo el antilogaritmo:

$$e^{\ln|C(t)|} = e^{it} e^C$$

$$C(t) = Ae^{it} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Familia de soluciones} \\ A \text{ es un parámetro} \end{array} \quad \dots (I)$$

Valuando las condiciones iniciales en la solución general:

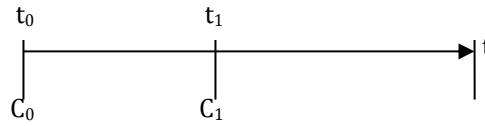
$$C(t) = Ae^{it} \Big|_{t=t_0} = C_0$$

$$\begin{array}{l} C_0 = Ae^{it_0} \\ A = C_0 e^{-it_0} \end{array}$$

Sustituyendo el valor de A en (I):

$$C(t) = C_0 e^{-it_0} e^{it} \quad \dots (II)$$

Para obtener el valor de la constante i se necesita una condición adicional. Dejando el dinero en el banco se obtiene: $C(t_1) = C_1$



Evaluando la condición $C(t_1) = C_1$ en (II):

$$C(t = t_1) = C_0 e^{i(t-t_0)} \Big|_{t=t_1} = C_1$$

$$C_1 = C_0 e^{i(t_1-t_0)} \quad \dots (III)$$

$$\frac{C_1}{C_0} = e^{i(t_1-t_0)}$$

Aplicando antilogaritmo:

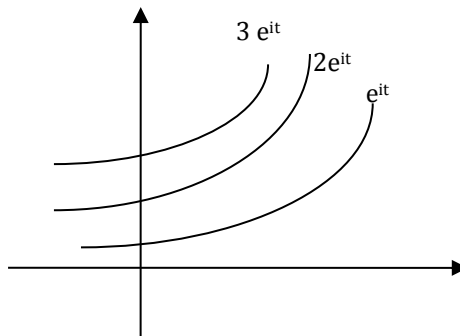
$$\ln \left| \frac{C_1}{C_0} \right| = i(t_1 - t_0)$$

Despejando i :

$$i = \frac{\ln \left| \frac{C_1}{C_0} \right|}{t_1 - t_0}$$

Sustituyendo i en (II):

$$C(t) = C_0 e^{\frac{\ln \left| \frac{C_1}{C_0} \right|}{t_1 - t_0} (t - t_0)}$$



Definición de ecuación diferencial lineal.

Una Ecuación Diferencial Lineal (E.D.L.) se puede expresar de la siguiente manera:

$$a_n(x) \frac{d^n y(x)}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y(x)}{dx^{n-1}} + \dots + a_0(x) y(x) = Q(x)$$

donde:

Si $a_i(x) \forall i$ es función, entonces la E.D.L. es de coeficientes variables.

Si $a_i(x) \forall i$ es constante, entonces la E.D.L. es de coeficientes constantes.

Si $Q(x) = 0$, entonces la E.D.L. es Homogénea.

Si $Q(x) \neq 0$, entonces la E.D.L. es No Homogénea.

NOTA: Toda E.D.L. es de primer grado.

Ejemplos:

Determinar el tipo, orden y grado de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) + \frac{dy}{dx} = \cos(x)$

E.D.L., de segundo orden y grado 1

b) $(y''''(x) \cdot x)^3 + y''(x) - 3x = 0$

E.D.O., No Lineal, de orden 3 y grado 3

c) $\frac{d^4 m}{dr} + m \left(\frac{d^3 m}{dr}\right)^2 + 6r = 0$

E.D.O., **No lineal**, de orden 4 y grado 1

Ejemplo:

Clasificar las siguientes ecuaciones diferenciales:

Ecuación	Tipo	Orden	Grado	Lineal
$y' + xy = x^2$	Ordinaria	1	1	Si
$(y')^3 = \text{sen}(x)$	Ordinaria	1	3	No
$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = \text{sen}(x, y)$	Parcial	2	1	_____
$\frac{dy}{dt} + \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$	Ordinaria	2	1	Si
$\frac{\partial y(x, y)}{\partial x^2} = \frac{m}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$	Parcial	2	1	_____

Ejemplo de Solución singular.

1) Verificar si la función $y = Cx^4$ es o no solución de la ecuación diferencial $xy' - 4y = 0$.

Resolución:

$$xy' - 4y = 0 \quad \dots (1)$$

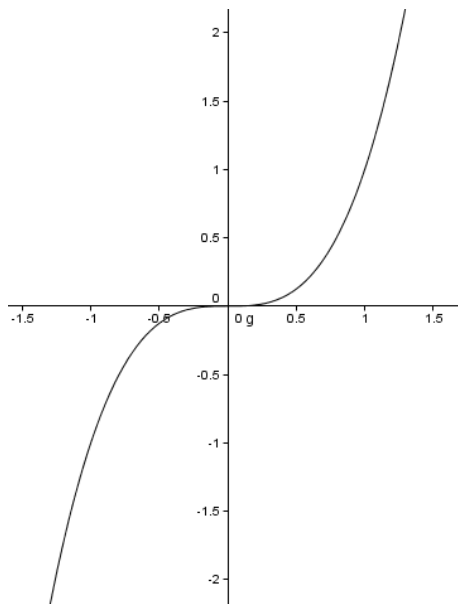
Derivando $y = Cx^4$ con respecto a x se tiene:

$$y' = 4Cx^3$$

Sustituyendo $y = Cx^4$ y $y' = 4Cx^3$ en (1):

$$xy' - 4y = x(4Cx^3) - 4(Cx^4) = 0$$

$\therefore$ Sí es solución



Si $C=1$, la solución particular de la general es:

$$y = x^4$$

Si $C=-1$ la solución particular de la general es:

$$y = -x^4$$

$$y(x) = \begin{cases} x^4; & x > 0 \\ -x^4; & x \leq 0 \end{cases}$$

Obtenga la ecuación diferencial cuya solución general es la familia $y = \frac{2Ce^{2x}}{1+Ce^{2x}}$

Resolución:

$$y = 2Ce^{2x}(1 + Ce^{2x})^{-1} \quad \dots (a)$$

Derivando (a):

$$y' = 4Ce^{2x}(1 + Ce^{2x})^{-1} - (1 + Ce^{2x})^{-2}2Ce^{2x}2Ce^{2x}$$

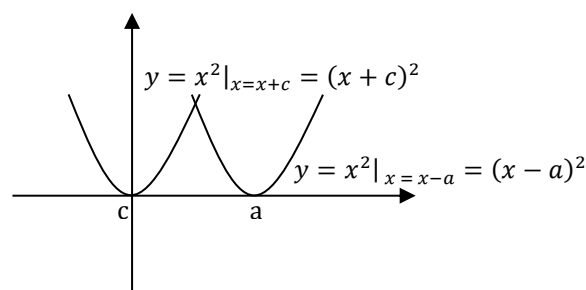
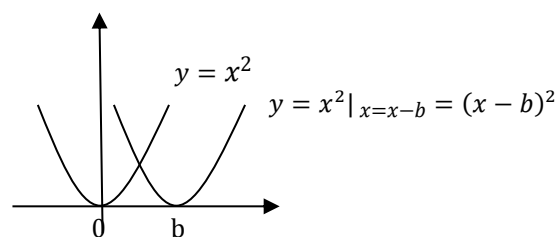
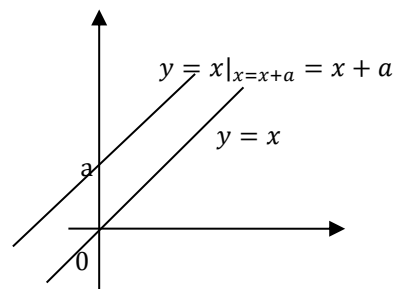
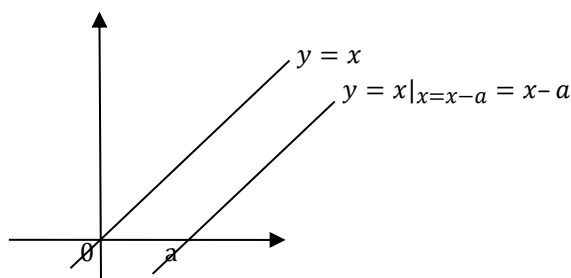
$$y' = \frac{4Ce^{2x}}{(1 + Ce^{2x})} - \frac{(2Ce^{2x})^2}{(1 + Ce^{2x})^2} = 2y - y^2$$

Finalmente:

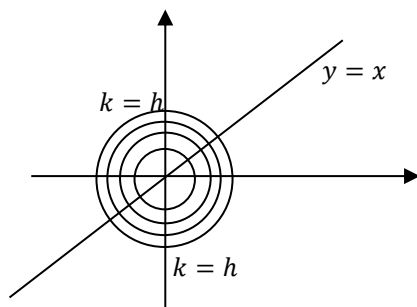
$$y' - 2y + y^2 = 0$$

Obtenga la ecuación diferencial cuya solución general es la familia de circunferencias con centro en la recta $y = x$ que pase por el origen.

Recordatorio de conocimientos antecedentes:



Resolución:



Ecuación de la circunferencia con centro en el origen: $x^2 + y^2 = r^2$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$r = \sqrt{2h^2}$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = 2h^2 \dots (1)$$

$$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 = 2h^2$$

$$x^2 + y^2 - 2h(x + y) = 0 \dots (2)$$

Derivando (2):

$$2x + 2yy' - 2h(1 + y') = 0$$

$$x + yy' - h(1 + y') = 0 \dots (3)$$

$$h = \frac{x + yy'}{1 + y'} \dots (4)$$

Sustituyendo (4) en (2):

$$x^2 + y^2 - 2 \left(\frac{x + yy'}{1 + y'} \right) (x + y) = 0$$

Multiplicando por $(1 + y')$:

$$(1 + y')(x^2 + y^2) - 2(x + yy')(x + y) = 0$$

$$x^2 + y^2 + x^2y' + y^2y' - (2x + 2yy')(x + y) = 0$$

$$x^2 + y^2 + x^2y' + y^2y' - 2x^2 - 2xy - 2xyy' - 2y^2y' = 0$$

$$-x^2 + y^2 - 2xy + y'(x^2 - y^2 - 2xy) = 0$$

Despejando y' :

$$y' = \frac{x^2 - y^2 + 2xy}{x^2 - y^2 - 2xy} \text{ para } x^2 - y^2 - 2xy \neq 0$$

Verificar si la función $y(x) = 3e^{-2x} + 9$ es solución de la ecuación diferencial $y''(x) - 5y(x) = 3$

Resolución:

Obteniendo la primera y segunda derivada de $y(x)$:

$$y' = -6e^{-2x} + 0$$

$$y'' = 12e^{-2x} + 0$$

Sustituyendo en el lado izquierdo de la E.D.:

$$12e^{-2x} - 5(3e^{-2x} + 9) = -3e^{-2x} - 45$$

Concluyendo:

$$-3e^{-2x} - 45 \neq 3 \quad \therefore \text{no es solución}$$

Verificar si la función $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3e^{-2x} + C_4e^{2x}$ es solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy^4}{dx^4} - 5 \frac{dy^2}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} = 0$$

Resolución:

Obteniendo $y', y'', y''', y^{(IV)}$:

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3e^{-2x} + C_4e^{2x}$$

$$y'(x) = -C_1e^{-x} + C_2e^x - 2C_3e^{-2x} + 2C_4e^{2x}$$

$$y''(x) = C_1e^{-x} + C_2e^x + 4C_3e^{-2x} + 4C_4e^{2x}$$

$$y'''(x) = -C_1e^{-x} + C_2e^x - 8C_3e^{-2x} + 8C_4e^{2x}$$

$$y^{IV}(x) = C_1e^{-x} + C_2e^x + 16C_3e^{-2x} + 16C_4e^{2x}$$

Sustituyendo en el lado izquierdo de la E.D.:

$$e^x + 16C_3e^{-2x} + 16C_4e^{2x} - 5(C_1e^{-x} + C_2e^x + 4C_3e^{-2x} + 4C_4e^{2x}) + 4(C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3e^{-2x} + C_4e^{2x}) =$$

$$C_1e^{-x} + C_2e^x + 16C_3e^{-2x} + 16C_4e^{2x} - 5C_1e^{-x} - 5C_2e^x - 20C_3e^{-2x} - 20C_4e^{2x} + 4C_1e^{-x} + 4C_2e^x + 4C_3e^{-2x} + 4C_4e^{2x}$$

$$0 = 0 \quad \therefore \text{Sí es solución}$$

Tema II. Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Métodos de solución a estudiarse en este tema:

- a) **Lineales.** Primer orden y coeficientes variables y coeficientes constantes (*Método de Factor integrante*).
- b) **No lineales de primer orden**
Métodos: Variables separables, coeficientes homogéneos, sustitución $y = ax + by$, exactas, factor integrante, isóclinas (método gráfico).

II.1 Ecuación Diferencial de Variables Separables.

Cualquier E.D.O. de orden n se puede expresar como $f(x, y, y', y'', \dots) = 0$

Una Ecuación Diferencial de Primer Orden (E.D.P.O.) se puede expresar: $f(x, y, y') = 0$

Una E.D.O. de primer orden $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ es de variables separables si $f(x, y) = g(x)p(y)$, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)p(y); \quad \int \frac{dy}{p(y)} = \int g(x)dx + C$$

II.1.1 Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}; \quad y \neq 0$$

Resolución:

$$ydy = -xdx \quad y \neq 0$$

$$ydy + xdx = 0$$

Integrando:

$$\frac{y^2 + x^2}{2} = C$$

Multiplicando por 2:

$$y^2 + x^2 = 2C; \text{ haciendo } c = 2C; \quad y^2 + x^2 = C \quad \text{Solución en forma implícita}$$

$$y = \pm\sqrt{C - x^2} \quad \dots(I)$$

$$x^2 \geq 0; \quad y^2 \geq 0$$

$$x^2 + y^2 > 0 \rightarrow C \neq 0$$

De (I):

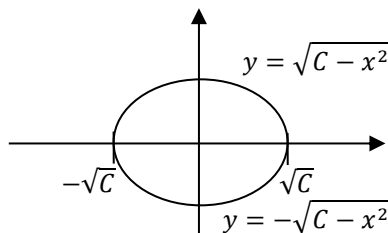
$$C - x^2 > 0$$

Sumando x^2 :

$$C > x^2$$

$$+\sqrt{C} > x$$

$$-\sqrt{C} < x$$



$$\text{Solución singular:} \quad y(x) = \begin{cases} \sqrt{C - x^2} & ; -C < x \leq 0 \\ -\sqrt{C - x^2} & ; 0 < x < C \end{cases}$$

II.1.2 Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$-dy - ky \, dx = 0; \quad k \neq 0$$

$$-ky \, dx = dy$$

$$-k \, dx = \frac{dy}{y}$$

$$-kx = \ln y + C; \quad k \neq 0$$

$$e^{kx} + y = C$$

$$y = C e^{kx}$$

II.1.3 Resolver la ecuación diferencial:

$$(\operatorname{sen}(x) \cos^2(y)) \, dx - (\cos(x) \operatorname{sen}(y)) \, dy = 0$$

Resolución:

$$\operatorname{sen}(x) \cos^2(y) \, dx = \cos(x) \operatorname{sen}(y) \, dy$$

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \, dx = \frac{\operatorname{sen}(y)}{\cos^2(y)} \, dy$$

$$\int \tan(x) \, dx = \int \operatorname{sen}(y) \cos^{-2}(y) \, dy$$

$$\ln(\cos(x)) + C = \sec(y) + C$$

$$\ln(\cos(x)) - \sec(y) = C$$

II.1.4 Resolver la ecuación diferencial:

$$dy = \frac{x}{y^3} \, dx \quad y \neq 0$$

Resolución:

$$\int y^3 \, dy = \int x \, dx$$

$$\frac{1}{4} y^4 + C = \frac{1}{2} x^2 + C$$

$$y^4 - 2x^2 = C$$

II.1.5 Resolver la ecuación diferencial:

$$x^{\frac{1}{2}} dy + dx = 0; \quad x \geq 0$$

Resolución:

$$x^{\frac{1}{2}} dy = -dx$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = - \int dy$$

$$2x^{\frac{1}{2}} + C = -y + C$$

$$2x^{\frac{1}{2}} + y = C$$

$$y = -2\sqrt{x} + C; \quad x \geq 0$$

II.1.6 Resolver la ecuación diferencial:

Resolución:

$$2x(y+1)dx - ydy = 0$$

$$2x(y+1)dx = ydy$$

$$2 \int xdx = \int \frac{y}{y+1} dy$$

$$x^2 + C = y - \ln(y+1) + C$$

$$x^2 - y + \ln(y+1) = C$$

II.2 Ecuación Diferencial de Coeficiente Homogéneos.

II.2.1 Definición de función homogénea.

Una función $f(x, y)$ es homogénea y de grado n si satisface:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

Ejemplo:

Comprobar si la siguiente función es homogénea: $f(x, y) = x + xy$

Resolución:

Condición para ser una función homogénea: $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$

$$f(x, y) = x + xy \quad \dots (1)$$

$$f(tx, ty) = tx + txt y$$

Factorizando t :

$$f(tx, ty) = tx + t^2 xy \quad \dots (2)$$

De (1) y (2) concluimos que:

$$f(tx, ty) \neq f(x, y) \quad \therefore \text{No es una ecuación homogénea}$$

II.2.2 Resolución de la Ecuación Diferencial de Coeficiente Homogéneos

Sea la E.D.O : $\frac{dy}{dx} = f(x, y) \dots (I)$

La importancia de trabajar con una ecuación diferencial ordinaria en la que $f(x, y)$ es homogénea radica que mediante la sustitución $v = xy$ ó $v = \frac{y}{x}$ se transforma en una E.D.O. de variables separables.

Sea la E.D.O.:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \dots (I)$$

Si se cumple:

$$f(tx, ty) = t^n(x, y)$$

entonces (I) es una E.D.O. de coeficientes homogéneos y de grado n .

Mediante la sustitución:

$$v = \frac{y}{x} \dots (A)$$

la E.D.O. (I) se transforma en una E.D.O. de variables separables.

Despejando y de (A) se obtiene:

$$y = vx$$

Derivando la expresión anterior con respecto a x :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}x + v \dots (II)$$

Sustituyendo (A) en (I):

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = G(v) = G\left(\frac{y}{x}\right) \dots (III)$$

Sustituyendo (II) en (III):

$$\frac{dv}{dx}x + v = G(v) = G\left(\frac{y}{x}\right)$$

La E.D.O. anterior es una E.D. de variables separables.

Resolviendo la E.D. de variables separables:

Separando variables:

$$\frac{dv}{dx}x = G(v) - v$$

$$\frac{dv}{G(v) - v} = \frac{dx}{x}$$

Integrando:

$$\int \frac{dv}{G(v) - v} + C = \int \frac{dx}{x} + C$$

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

II.2.2.1 Resolver la ecuación diferencial:

$$(xy + y^2 + x^2)dx - x^2dy = 0$$

Resolución:

Se puede verificar que las funciones $(xy + y^2 + x^2)$ y $-x^2$ son homogéneas y de grado dos. Sumando x^2dy en ambos miembros de la E.D. se tiene:

$$x^2dy = (xy + y^2 + x^2)dx$$

Dejando la E.D. en la forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2 + x^2}{x^2} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} + 1 \quad \dots (I)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = G\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$y = vx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}x + v \quad \dots (A)$$

$$v = \frac{y}{x} \quad \dots (B)$$

Sustituyendo (A) y (B) en (I):

$$\frac{dv}{dx}x + v = v + v^2 + 1 \quad \therefore \text{Ecuación homogénea de variables separables}$$

Simplificando:

$$\frac{dv}{dx}x = v^2 + 1$$

Separando variables e integrando:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dv}{v^2 + 1}$$

$$\ln(x) = \arctan(v) + C ; \quad \arctan(v) = \ln(x) + C$$

Obteniendo la tangente a ambos miembros:

$$v = \tan(\ln(x) + C)$$

Haciendo el cambio de variable: $v = \frac{y}{x}$
 $\frac{y}{x} = \tan(\ln(x) + C)$

$$y = x \tan(\ln(x) + C)$$

II.2.2.2 Resolver la ecuación diferencial:

$$(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$$

Resolución:

Se puede verificar que las funciones $(x^2 - 3y^2)$ y $2xy$ son homogéneas y de grado dos, lo cual garantiza que la ecuación diferencial es de coeficientes homogéneos y se puede realizar el cambio de variable:

$$v = \frac{y}{x} \dots (1)$$

$$v = \left(\frac{y}{x}\right); \quad xv = y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}x + v \dots (2)$$

$$2xydy = (-x^2 + 3y^2)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y} + \frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right) \dots (A)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (A):

$$\frac{dv}{dx}x + v = -\frac{1}{2v} + \frac{3}{2}v$$

$$\frac{dv}{dx}x = -\frac{1}{2v} - v + \frac{3}{2}v = -\frac{1}{2v} + \frac{1}{2}v$$

Separando variables:

$$\frac{dv}{dx}x = \frac{v^2 - 1}{2v}$$

$$\frac{2v}{v^2 - 1}dv = \frac{1}{x}dx$$

Trabajando el lado izquierdo de la ecuación con fracciones parciales:

$$\frac{2v}{v^2 - 1} = \frac{2v}{(v + 1)(v - 1)} = \frac{A}{v + 1} + \frac{B}{v - 1}$$

$$A(v - 1) + B(v + 1) = 2v$$

$$Av - A + Bv + B = 2v$$

Agrupando términos semejantes:

$$A + B = 2 \dots (3)$$

$$-A + B = 0 \dots (4)$$

De (4):

$$B = A$$

Sustituyendo en (3):

$$2B = 2$$

$$B = 1; \quad A = 1$$

$$\therefore \int \frac{1}{v+1} dv + \int \frac{1}{v-1} dv = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln(v+1) + \ln(v-1) = \ln(x) + C$$

$$\ln(v+1) + \ln(v-1) - \ln(x) = C$$

$$\ln\left(\frac{(v+1)(v-1)}{x}\right) = \ln\left(\frac{v^2-1}{x}\right) = C \dots (5)$$

Sustituyendo (1) en (5):

$$\ln\left(\frac{\frac{y^2}{x^2}-1}{x}\right) = C$$