FACULTAD DE INGENIERÍA
U N A M

PROBABILIDAD

Y

ESTADÍSTICA

Irene Patricia Valdez y Alfaro

irenev@servidor.unam.mx

T E M A S DEL CURSO

1. Análisis Estadístico de datos muestrales.
2. Fundamentos de la Teoría de la probabilidad.
3. Variables aleatorias.
4. Modelos probabilísticos comunes.
5. Variables aleatorias conjuntas.
6. Distribuciones muestrales.

CONTENIDO TEMA 2

2. Fundamentos de la teoría de la probabilidad.

Objetivo: El alumno comprenderá el concepto de probabilidad, así como los teoremas en los que se basa esta teoría.

2.1 Experimentos determinísticos y aleatorios. Eventos y espacio de eventos.

2.2 Concepto de probabilidad, cálculo de probabilidades a través de técnicas de conteo y diagramas de árbol.

2.3 Definición axiomática de la probabilidad.

2.4 Probabilidad conjunta, marginal y condicional, eventos independientes. Probabilidad total, teorema de bayes.

FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

CONCEPTOS BÁSICOS

DEFINICIONES PREVIAS

- **FENÓMENO (EXPERIMENTO):** Es todo aquel acto o acción que se realiza con el fin de observar sus resultados y cuantificarlos.

Los fenómenos pueden clasificarse de acuerdo al tipo de resultados en:

- Determinístico

  Es aquel cuyos resultados se pueden predecir de antemano.

- Probabilístico (aleatorio)

  Es aquel en el que para las limitaciones actuales del conocimiento científico, no se puede predecir con certeza el resultado.

ESPACIO DE EVENTOS

- Al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se le denomina ESPACIO DE EVENTOS (S).
- A cada posible resultado del espacio le llamaremos ELEMENTO.
- Un EVENTO en general es un conjunto de eventos simples (o posibles resultados del experimento).
- Si el evento está compuesto por un único elemento le llamaremos EVENTO SIMPLE.
- Si el evento no tiene ningún resultado posible se le denomina EVENTO VACÍO.

El espacio de eventos puede ser FINITO o INFINITO y a su vez DISCRETO O CONTINUO

EJEMPLO: ESPACIO DE EVENTOS

Experimento: Arrojar dos dados y observar la suma de los puntos de las caras que quedan hacia arriba.

Sean:

Y_1 = los puntos del primer dado

Y_2 = los puntos del segundo dado

$X = Y_1+Y_2$

Nota: debe observarse, en este caso, que el resultado x=4 puede presentarse si

$Y_1=2$ y $Y_2=2$,

o bien si

$Y_1=1$ y $Y_2=3$.

Lo mismo ocurre con otros valores.

¿Cuál es el espacio de eventos de X?

$$S = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \}$$

$$S = \{ x | \; 2 \leq x \leq 12, \; x \in \aleph \}$$

EJEMPLO: ESPACIO DE EVENTOS

$$S = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \}$$

Algunos eventos de este espacio son:

$$A = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12 \}$$

$$B = \{ 7, 10, 11 \}$$

$$C = \{ 3, 5, 7, 9, 11 \}$$

$$D = \{ 9 \}$$

Nota: debe observarse, en este caso, que el resultado x=4 puede presentarse si

$Y_1=2$ y $Y_2=2$,

o si

$Y_1=1$ y $Y_2=3$.

Lo mismo ocurre con otros valores.

ALGUNAS OPERACIONES ESTOS CON EVENTOS:

$$A \cup C = S \qquad A \cap C = \varnothing$$

$$C \cap D = D \qquad A \cap B = \{ 10 \}$$

$$B \cup C = \{ 3, 5, 7, 9, 10, 11 \} \qquad B \cap C = \{ 7, 11 \}$$

DEFINICIONES PREVIAS

- Eventos mutuamente excluyentes:
  - Si se tienen dos o más eventos que pertenecen a S y al realizar el experimento solo puede ocurrir uno u otro, pero no simultáneamente.

Por ejemplo: $A \cap B = \varnothing$

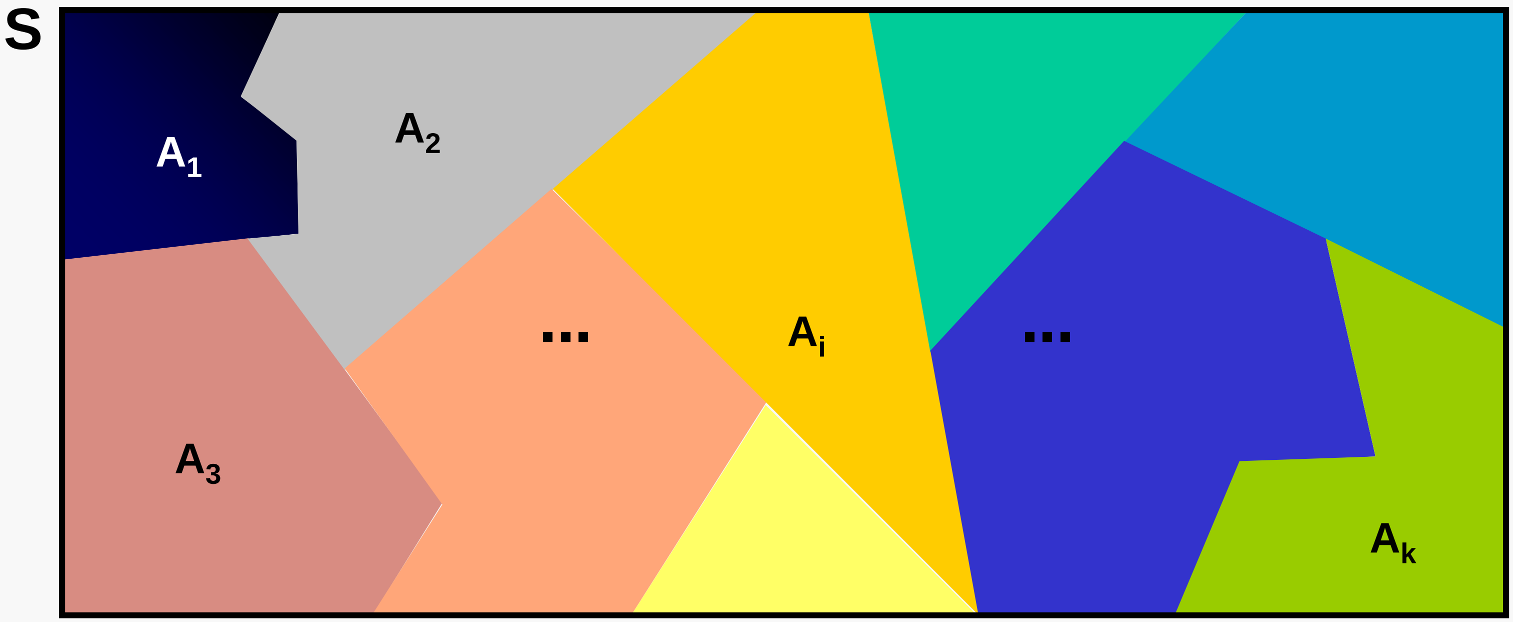
- Eventos colectivamente exhaustivos:
  - Si la unión de los eventos es igual al especio de eventos.

Por ejemplo: $A \cup B = S$

- Eventos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos:
  - Si se cumplen las dos condiciones anteriores

Por ejemplo: $A \cap B = \varnothing$ y además $A \cup B = S$

EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES Y COLECTIVAMENTE EXHAUSTIVOS:



$A_i \in S, \ \forall \ i=1, 2, \ldots k$ Todos los eventos A_i pertenecen al espacio de eventos S.

$\cap A_i = \varnothing$, $i=1, 2, \ldots k$ La intersección de todos los eventos A_i es el conjunto nulo.

$\cup A_i = S$, $i=1, 2, \ldots k$ La unión de todos los eventos A_i es igual al especio de eventos.

CONCEPTO DE PROBABILIDAD

Del latín probabilitas, verosimilitud (verus, verdadero y similis semejante). Fundada apariencia de verdad, calidad de probable, que puede suceder.

DIFERENTES INTERPRETACIONES DE PROBABILIDAD

SUBJETIVA

CLÁSICA

FRECUENTISTA

INTERPRETACIÓN **SUBJETIVA** DE LA PROBABILIDAD

De acuerdo con esta interpretación, la probabilidad de un evento es el grado de certidumbre que tiene una persona, o grupo de personas, acerca de la ocurrencia de un evento.

puede ser que se base en la experiencia o en cierta información que se tenga.

Una probabilidad igual a cero indica una certeza absoluta de que el evento no ocurrirá y una probabilidad igual a 1 (100%) indica una certeza absoluta de que el evento ocurrirá.

INTERPRETACIÓN CLASICA DE LA PROBABILIDAD

Sea n(S) es el número de elementos, igualmente posibles y mutuamente excluyentes, del espacio muestral S de un experimento aleatorio, y sea n(A) el número de elementos de un evento cualquiera A de ese espacio muestral.

La probabilidad de que ocurra el evento A, al realizar el experimento, es la proporción de n(A) con respecto a n(S).

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

INTERPRETACIÓN FRECUENTISTA DE LA PROBABILIDAD

Si un <u>experimento aleatorio</u> se ejecuta n veces bajo las mismas condiciones, y m de los resultados son favorables al evento A, la probabilidad de que ocurra el evento A al realizar nuevamente el experimento es:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

Una forma común de calcular la probabilidad aproximada de un evento A, desde el punto de vista frecuentista, es dividiendo el número de veces que ocurre A, n(A); entre el número total de veces que se efectúa el experimentos, n(S) ó simplemente n.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}$$

EJEMPLOS DE INTERPRETACIONES DE LA PROBABILIDAD

SUBJETIVA:

Está nublado, hay un 70% de probabilidad de lluvia.

CLÁSICA:

Si en un grupo hay 40 ingenieros y 20 arquitectos, la probabilidad de que al seleccionar aleatoriamente a una persona del grupo, su profesión sea de ingeniero es:

40/60 = 4/6.

FRECUENTISTA:

Al sacar de una urna muy grande 100 pelotas, se observaron 30 rojas y 70 blancas. La probabilidad de que al sacar otra pelota ésta sea blanca es: 70/100 =7/10. (se desconoce cuántas pelotas hay dentro de la urna)

AXIOMAS DE PROBABILIDAD

Sea **S** el espacio de eventos de un experimento,
y **E** un evento cualquiera de S.

1. **$P(S) = 1$**
2. **$P(E) \geq 0$**
3. **Si para $E_1, E_2, \ldots$**

   se cumple que $E_i \cap E_j = \varnothing$, para toda $i \neq j$,

   entonces:

   $P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots$

TEOREMAS DERIVADOS DE LOS AXIOMAS

Sea **S** el espacio muestral de un experimento, y **E** un evento cualquiera de S.

1. **$P(\emptyset) = 0$**

2. **$0 \leq P(E) \leq 1$,** **para cualquier $E \in S$**

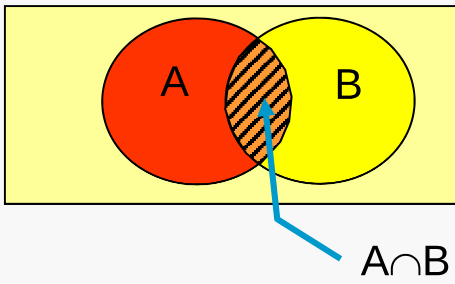
3. **Regla de la adición para cualesquiera eventos:**

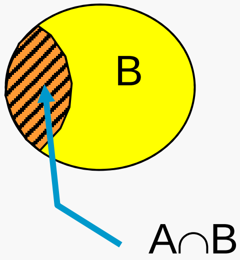
   Si A y B pertenecen a S, se cumple que:

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

Supónganse dos conjuntos A y B que pertenecen al espacio muestral S





Si se sabe que ya ocurrió el evento B, la probabilidad de que también haya ocurrido A se escribe: P(A|B) y se lee *"la probabilidad de A dado B".* P(A|B) equivale a calcular la probabilidad de A cuando el espacio muestral se reduce a B.

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

Pero también, si dividimos numerador y denominador entre n(s) tenemos:

$$P(A|B)=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

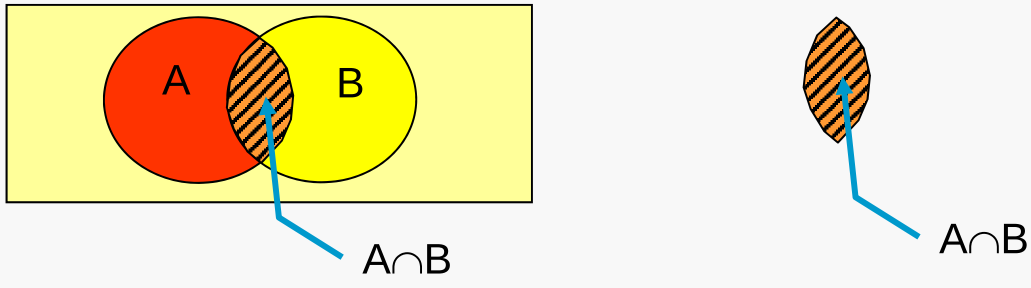
$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

y análogamente:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

PROBABILIDAD CONJUNTA

Supónganse dos eventos A y B que pertenecen al espacio muestral S



La probabilidad conjunta de A y B, es la probabilidad de que ocurran el evento A y el evento B de manera simultánea.

Despejando de la expresión dada antes para probabilidad condicional se tiene:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B)$$

o bien:

$$P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A)$$

EVENTOS INDEPENDIENTES

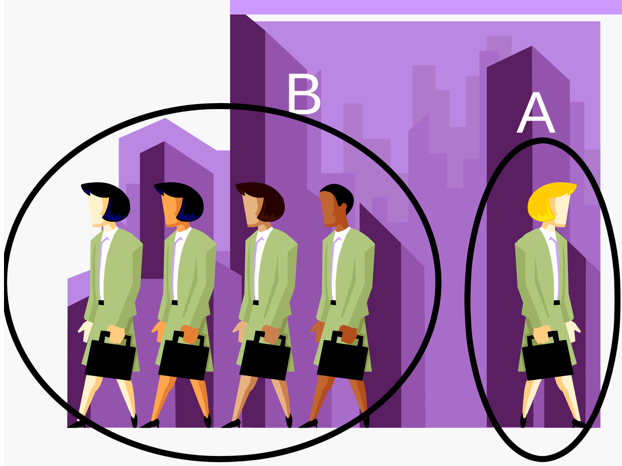
Supónganse dos eventos A y B que pertenecen al espacio muestral S

Se dice que A es independiente de B si resulta que P(A|B)=P(A), lo que significa que el evento B no influye en absoluto para la realización o no del evento A.

Si es éste el caso, y puesto que $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ tenemos que: $P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

y por lo tanto, los eventos A y B son independientes si, y solo si:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$



Teorema: si A y B son independientes, entonces:

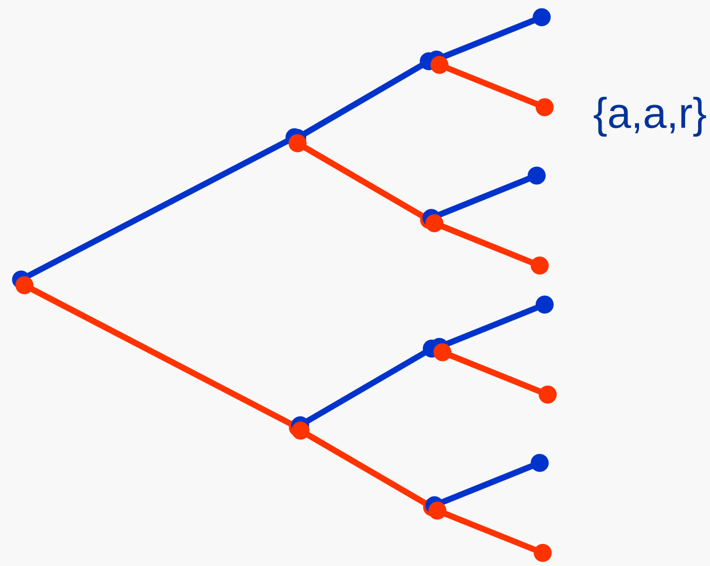
A y B' son independientes.
A' y B' son independientes.
A' y B son independientes.

TEOREMA DE LA MULTIPLICACIÓN PARA PROBABILIDAD CONDICIONAL

Sean $A_1, A_2, \ldots A_n$ n eventos cualesquiera de un espacio muestral S.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\ldots P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

En una urna hay 60 esferas azules y 40 rojas, ¿cuál es la probabilidad de que al sacar tres consecutivamente sin regresarlas, la secuencia sea: {a,a,r}



Calcular la probabilidad de que la secuencia sea {a,a,r} si cada que se saca una esfera se observa el color y se regresa a la urna.

Si los eventos A_i y A_j son independientes $\forall$ $i \neq j$, entonces:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)\ldots P(A_n)$$

PROBABILIDAD CONDICIONAL, CONJUNTA Y MARGINAL

Ejemplo:

En un curso de verano de regularización los alumnos inscritos se distribuyen como se muestra en la tabla. A cierto profesor se le asignará aleatoriamente a un alumno.

	PRIMER GRADO	SEGUNDO GRADO	TERCER GRADO	**Sumas**
FÍSICA	46	35	30	**111**
QUÍMICA	45	40	42	**127**
MATEMÁTEMÁTICAS	52	38	22	**112**
Sumas	**143**	**113**	**94**	350

La probabilidad de que le asignen un alumno de primer grado de física es de 46/350. Probabilidad conjunta.

La probabilidad de que le asignen un alumno de física (de cualquier grado) es 111/350. Probabilidad marginal.

Si le asignaron un alumno de química, la probabilidad de que éste sea de tercer grado es 42/127. Probabilidad condicional.

PROBABILIDAD MARGINAL

Probabilidad marginal de un evento es la probabilidad simple de ese evento, pero expresada como una suma de probabilidades conjuntas.

En un curso de verano de regularización los alumnos inscritos se distribuyen como se muestra en la tabla. A cierto profesor se le asignará aleatoriamente a un alumno.

		A	B	C	
		PRIMER GRADO	SEGUNDO GRADO	TERCER GRADO	**Sumas**
F	FÍSICA	46	35	30	**111**
Q	QUÍMICA	45	40	42	**127**
M	MATEMÁTEMÁTICAS	52	38	22	**112**
	Sumas	**143**	**113**	**94**	350

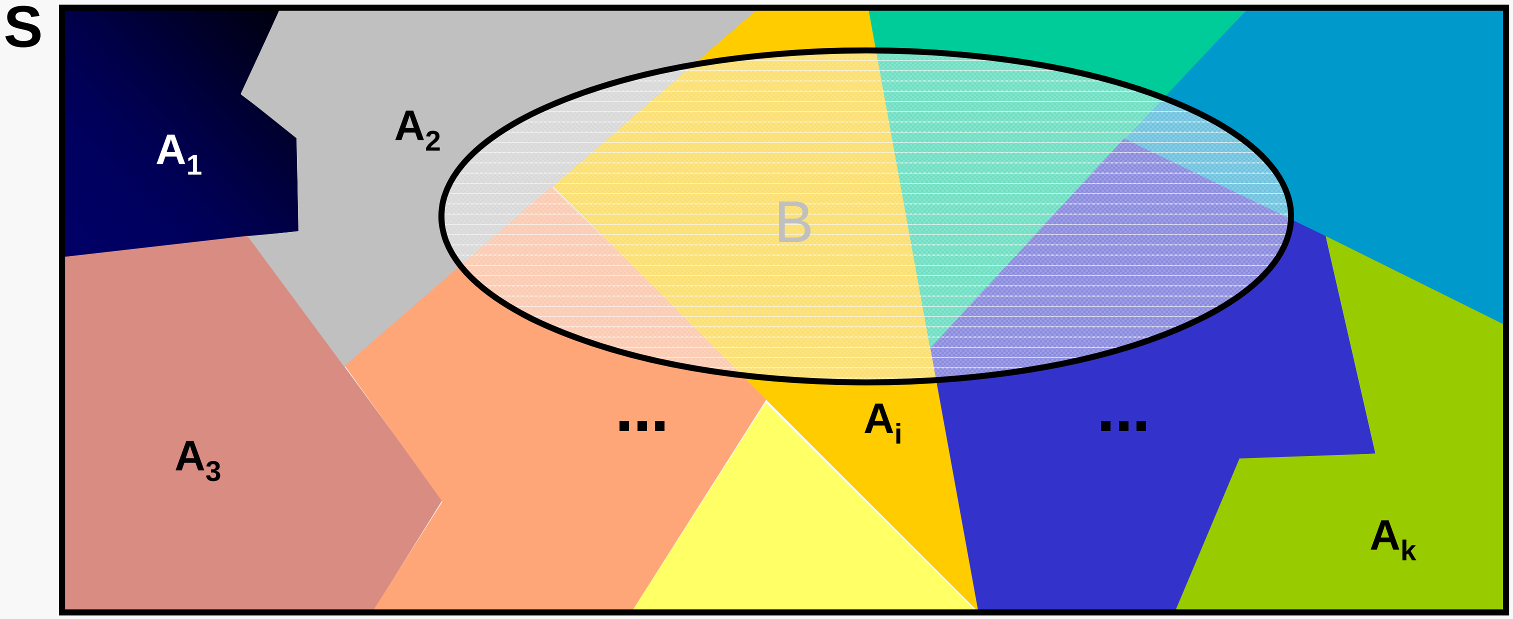
Podemos observar, con base en el renglón de sumas, que la probabilidad del evento A es simplemente 143/350, pero también:

$P(A) = P(A \cap F) + P(A \cap Q) + P(A \cap M) = 46/350 + 45/350 + 52/350 = 143/350$

Análogamente, con base en la columna de sumas, podemos ver que $P(Q) = 127/350$, pero también:

$P(Q) = P(Q \cap A) + P(Q \cap B) + P(Q \cap C) = 45/350 + 40/350 + 42/350 = 127/350$

PROBABILIDAD TOTAL



Considerese que el espacio muestral S está particionado en k eventos A_i (mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos); y que en el mismo espacio muestral S se define un evento B, que puede tener algunas intersecciones con los eventos Ai.

La probabilidad total del evento B puede expresarse como la suma de las intersecciones del evento B con los evento Ai

$$P(B)=P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_i \cap B) + \ldots + P(A_k \cap B)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i \cap B)$$

PROBABILIDAD TOTAL

Considerese la probabilidad total del evento B:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_i \cap B) + ... + P(A_k \cap B)$$

Recordando que para cada evento A_i : $P(A_i \cap B) = P(B \mid A_i)P(A_i)$

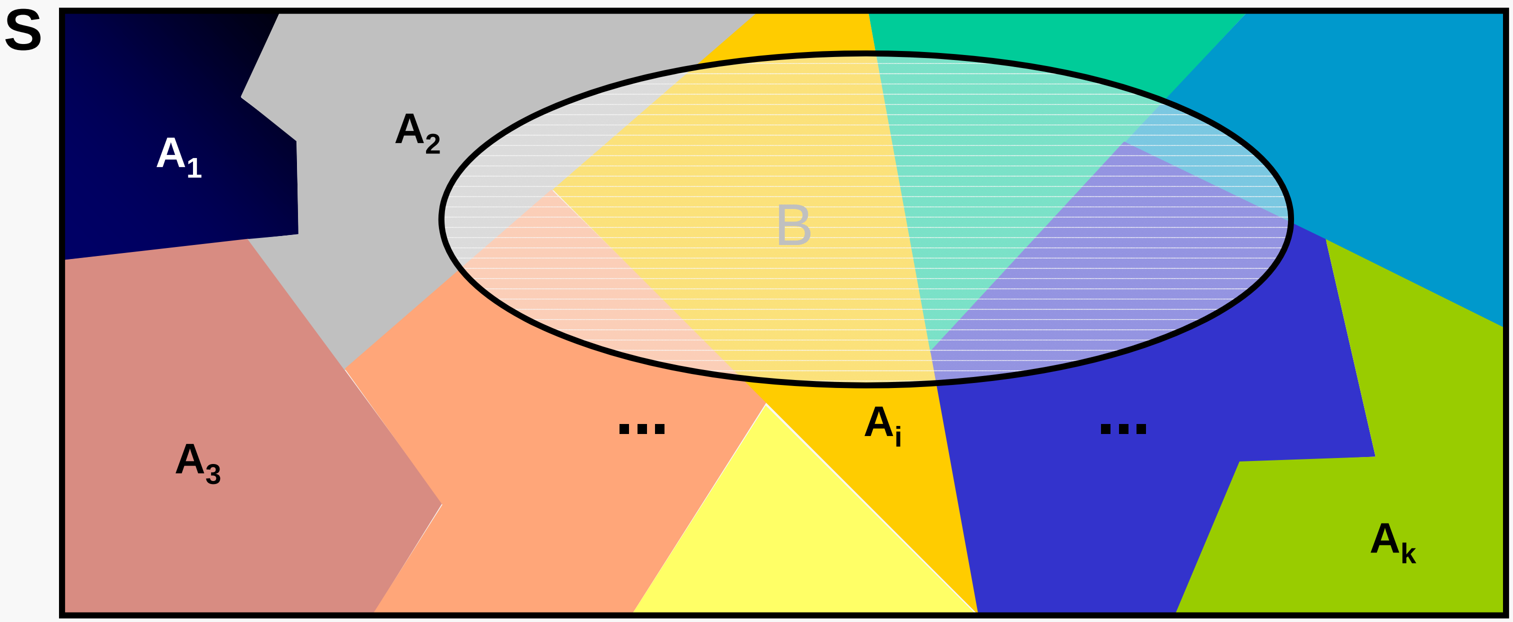
Sustituyendo éste último hecho en la expresión para la probabilidad total de B:

$$P(B) = P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + ... + P(B \mid A_i)P(A_i) + ... + P(B \mid A_k)P(A_k)$$

Con lo que la probabilidad total de B también se escribe:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B \mid A_i)P(A_i)$$

TEOREMA DE BAYES



Recordando que para un evento A_j :

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} \quad \text{...I}$$

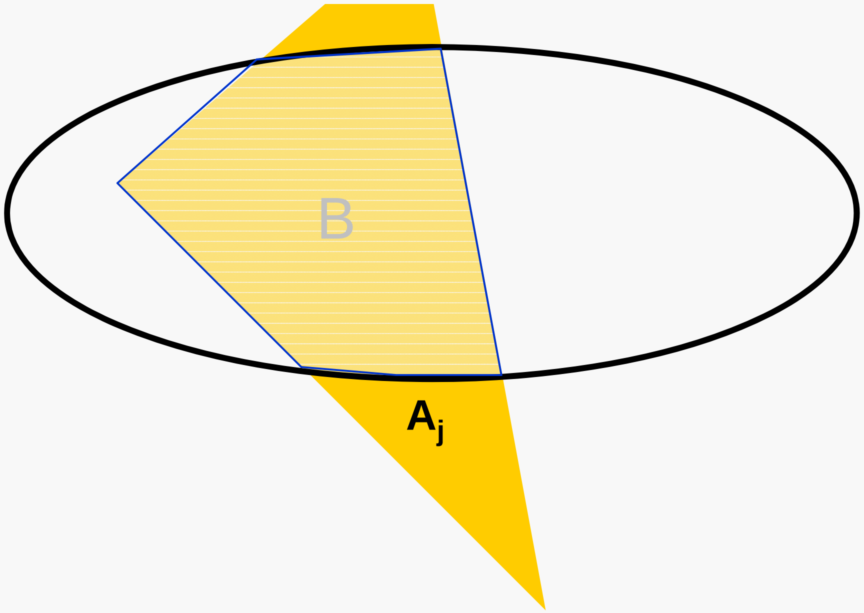
y que la probabilidad total del evento B es:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B \mid A_i) P(A_i) \quad \text{...II}$$

Sustituyendo **II** en **I** obtenemos:

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j \cap B)}{\sum_{i=1}^{k} P(B \mid A_i) P(A_i)} \quad \text{...III}$$

TEOREMA DE BAYES



Sustituyendo la siguiente expresión

$$P(A_j \cap B) = P(B \mid A_j)P(A_j)$$

en **III** obtenemos el:

TEOREMA DE BAYES:

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(B \mid A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(B \mid A_i)P(A_i)}$$