1.3 TÉCNICAS DE CONTEO

1.3.1 CARDINALES FINITOS

Cuando el número de posibles resultados de un experimento es finito, su espacio muestral es finito y su cardinal es un número natural. Si el experimento es simple, el espacio muestral es unidimensional, constituido por puntos muestrales con una sola componente, y el cardinal es simplemente el número de posibles resultados del experimento, los que se pueden enumerar fácilmente. Pero si el experimento es combinado, el cardinal puede ser tan grande, que sería del todo absurdo pretender enumerarlos todos, por ser un proceso lento, tedioso, costoso y susceptible de errores. Y realmente no es importante poder enumerarlos, sino saber contarlos.

Cuando se tienen N objetos, al escoger al azar uno o más de ellos, interesa calcular la probabilidad de cada elección. Escoger al azar un objeto de los N disponibles, significa que cada uno tiene la misma probabilidad de ser elegido: $P(\omega_i)=1/N.$ Escoger al azar dos objetos de los N, significa que cada posible par de objetos, sin considerar el orden, tiene la misma probabilidad de ser elegido que cualquier otro par; si existen k pares diferentes, entonces la probabilidad es $P(\omega_i \cap \omega_j)=1/k.$ Y escoger n objetos de los N, significa que cada posible conjunto de n objetos, sin considerar el orden, tiene la misma probabilidad de ser elegido que cualquier otra conjunto de n objetos.

$$P(A)=\frac{n}{N}=\frac{\text{número de maneras en que puede ocurrir } A}{\text{número de maneras en puede ocurrir el experimento}}$$

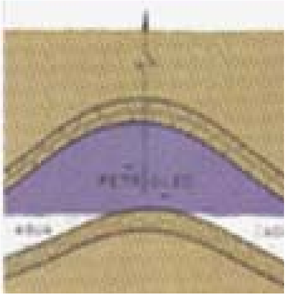
El análisis combinatorio estudia los procedimientos y estrategias para contar las posibles agrupaciones de los elementos de un conjunto, permitiendo determinar el número de posibilidades lógicas que cabe esperar al realizar algún experimento, sin necesidad de enumerarlas; es una forma abreviada de contar que se resume en unas cuantas técnicas basadas en procedimientos y fórmulas recurrentes.

1.3.2 PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL CONTEO

Si una acción puede realizarse de n_1 maneras diferentes y una segunda acción puede realizarse de n_2 maneras diferentes, entonces ambas acciones pueden realizarse secuencialmente de $n_1 n_2$ maneras diferentes.

Este principio multiplicativo se generaliza para cualquier número de acciones a realizar, esto es, si una primera acción se puede realizar de n_1 maneras diferentes, una segunda acción se puede realizar de n_2 maneras diferentes,..., y una r-ésima acción se puede realizar de n_r maneras diferentes, entonces las r acciones se pueden realizar de $n_1 n_2 ... n_r$ maneras diferentes.

Ejemplo 1.24. DADOS. Considere el experimento consistente en lanzar dos dados y observar las caras que quedan hacia arriba. El primer dado puede caer de 6 maneras diferentes ($1, 2, 3, 4, 5, 6$) y el segundo dado también puede caer de 6 maneras diferentes. Entonces, el número de maneras en que pueden caer ambos dados simultáneamente es: $6 \times 6 = 36$.

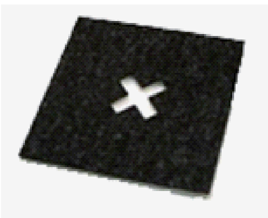


Ejemplo 1.25. POZOS EXPLORATORIOS. Considere el experimento consistente en observar el resultado de la perforación de cuatro pozos exploratorios. El resultado del primer pozo puede presentarse de 2 maneras (0: seco, 1: productor), el resultado del segundo, tercero y cuarto pozos también puede presentarse de 2 maneras. Entonces, el número de maneras en que puede observarse el conjunto, indicando el resultado de los cuatro pozos simultáneamente es: $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$.

Ejemplo 1.26. PLACAS. Las placas para automóvil en el D. F. están formadas por 6 caracteres: los tres primeros son dígitos y los tres últimos son letras del alfabeto. ¿Cuántas placas diferentes se pueden hacer?

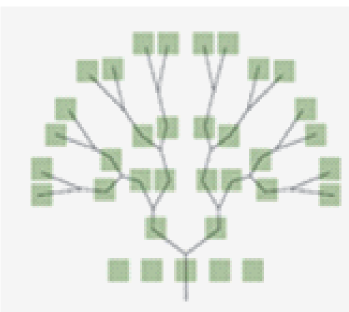
Primero vamos a analizar los dígitos: el primero se puede escoger de 10 maneras diferentes, el segundo de 10 maneras y el tercero de 10 maneras; así que, el número de maneras en que se puede formar la primera parte de la placa es: $10 \times 10 \times 10 = 1000$. Ahora bien, si se considera que el arreglo 000 no es válido, entonces habrá que restarle 1 al valor obtenido, con lo que quedan 999 maneras en que se puede formar la primera parte de la placa.

La segunda parte de la placa se forma con tres letras: la primera se puede escoger de 26 maneras diferentes (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z), la segunda de 26 maneras y la tercera de 26 maneras; así que el número de maneras en que se puede formar la segunda parte de la placa es: $26 \times 26 \times 26 = 17{,}576$. Finalmente, el número total de placas diferentes que se pueden formar es: $999 \times 17{,}576 = 17'558{,}424$



El principio multiplicativo es aplicable cuando el experimento se puede descomponer en un conjunto de acciones secuenciales o independientes, de modo que cada resultado del experimento se conforma con una posibilidad de cada una de esas acciones.

Diagramas de árbol

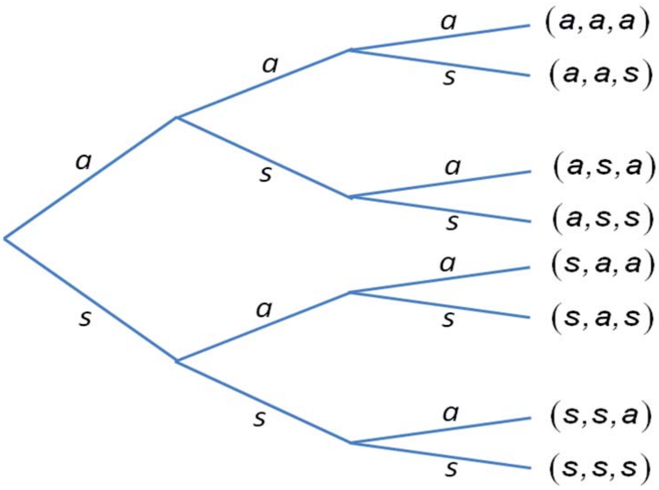


Un diagrama de árbol es una herramienta gráfica que permite enumerar todas las posibles maneras de realizar un conjunto de acciones secuenciales o independientes.

El árbol se construye a partir de un nodo, que representa la primera acción a efectuar; de éste se desprenden tantas ramas como maneras diferentes se pueda realizar esa acción; en las terminales de cada rama se dibujan otros nodos, que representan la segunda acción a efectuar y de los que se desprenden tantas ramas como maneras lógicas diferentes pueda realizarse esa segunda acción, considerando la manera en que se realiza la primera. Y así, sucesivamente.

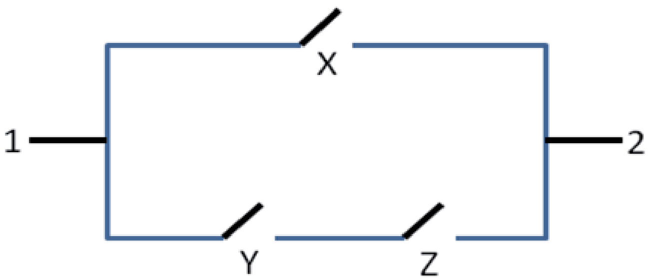
Ejemplo 1.27. MONEDAS. Considere el experimento consistente en lanzar una moneda tres veces consecutivas y observar, cada vez, la cara que queda hacia arriba.

La primera vez que se lanza la moneda, la cara que queda hacia arriba puede ser águila o sol; la segunda vez que se lanza, también la cara que queda hacia arriba puede ser águila o sol, sin importar lo que haya caído la primera vez; lo mismo puede ocurrir la tercera vez que se lanza la moneda. Entonces, el diagrama de árbol correspondiente es:



El número de maneras en que puede caer la moneda tres veces consecutivas es: $2 \times 2 \times 2 = 8$

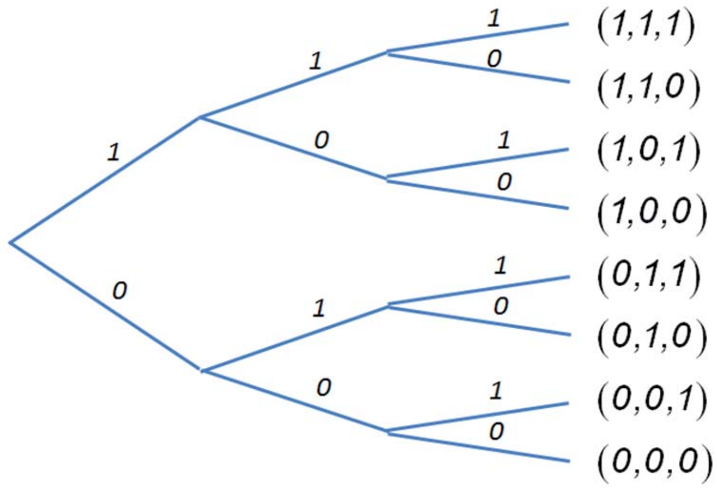
Ejemplo 1.28. CIRCUITO ELÉCTRICO. En el circuito mostrado en la siguiente figura, la corriente fluye de la terminal 1 a la terminal 2, siempre que el interruptor X esté cerrado, o que los interruptores Y y Z, ambos estén cerrados.



El experimento E_1 consiste en observar el funcionamiento de un interruptor, que puede presentar uno de dos estados: 0, abierto o 1, cerrado, generando el espacio muestral $S_1 = \{0,\ 1\}$.

Sea el experimento E_2 consistente en observar el funcionamiento de los tres interruptores, simultáneamente. Construya el diagrama de árbol asociado a tal experimento.

El funcionamiento de cada interruptor es independiente del funcionamiento de los otros dos, por lo que cada interruptor puede presentar uno de dos estados: 0, abierto o 1, cerrado. Entonces, el diagrama de árbol correspondiente es:

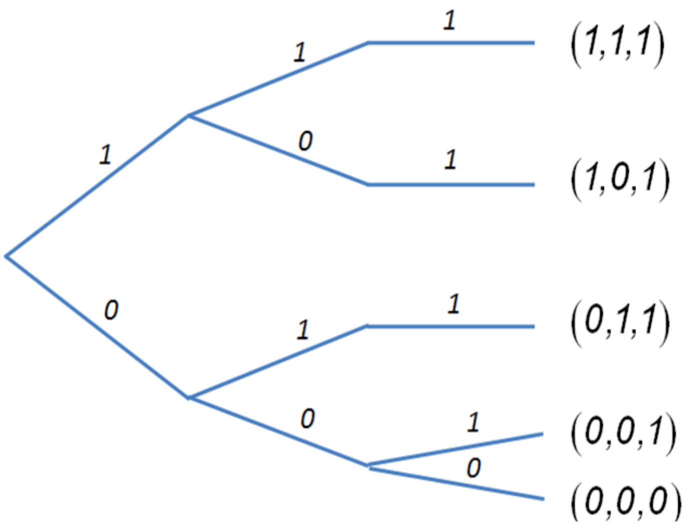


El número de maneras diferentes en que se pueden comportar los tres interruptores es: $2 \times 2 \times 2 = 8$

Ejemplo 1.31. ENTRONQUE. Considere el entronque Viaducto y Periférico, en el sentido sur-norte, conformado por los tramos X, Y y Z, tal como se muestra en la figura; cada tramo puede congestionarse por el tráfico o no. El experimento E_1 consiste en observar el funcionamiento de un tramo, que puede presentar uno de dos estados: 0, no congestionado, o 1, congestionado, generando el espacio muestral $S_1 = \{0, 1\}$. Observe cuidadosamente la relación que guardan los tramos.

Sea el experimento E_2 consistente en observar el funcionamiento de los tres tramos, simultáneamente. Construya el diagrama de árbol asociado a tal experimento.

Aquí se debe tomar en cuenta que, basta con que al menos uno de los tramos X o Y estén saturados para que el tramo Z también lo esté. El tramo Z se puede saturar o no, cuando los tramos X y Y no estén saturados. Entonces, el diagrama de árbol queda:

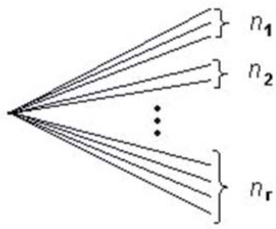


El número de maneras diferentes en que se pueden comportar los tres tramos viales es: 5

Principio aditivo

Si una acción puede realizarse de n_1 maneras diferentes y una segunda acción puede realizarse de n_2 maneras diferentes, pero no es posible realizar ambas acciones conjuntamente, entonces n_1 o n_2 pueden realizarse alternativamente de $n_1 + n_2$ maneras diferentes.

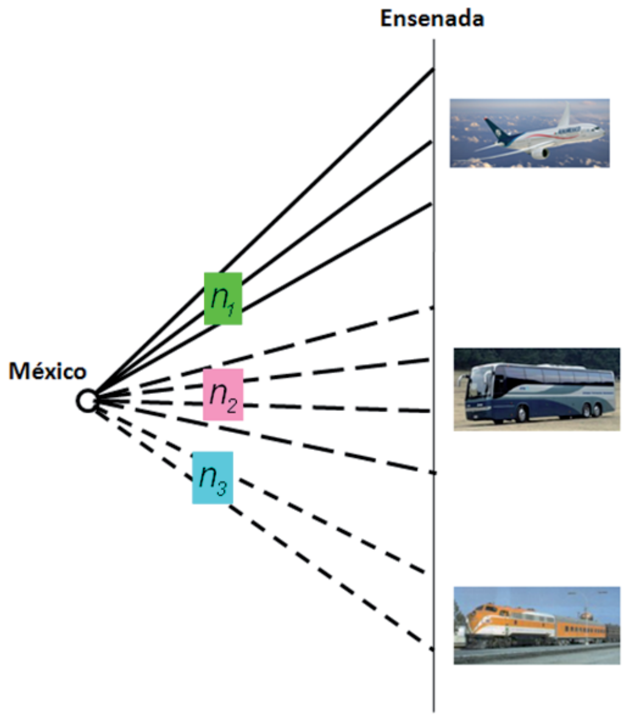
Este principio aditivo se generaliza para cualquier número de acciones alternativas a realizar, esto es, si una primera acción se puede realizar de n_1 maneras diferentes, una segunda acción se puede realizar de n_2 maneras diferentes,..., y una r-ésima acción se puede realizar de n_r maneras diferentes, entonces las r acciones alternativas se pueden realizar de $n_1 + n_2 +...+ n_r$ maneras diferentes.



También se puede hacer un esquema representativo del principio aditivo, aunque éste no sea un diagrama de árbol propiamente dicho. Todas las posibles ramas parten de un único nodo; algunas de ellas corresponden al número de maneras en que puede realizarse una primera acción, otras corresponden al número de maneras en que se puede realizar una segunda acción alternativa,… y así sucesivamente. El total de ramas es precisamente el número de maneras en las que se pueden llevar a cabo las distintas acciones alternativas.

Es muy sencillo distinguir cuándo hacer uso del principio multiplicativo y cuándo del aditivo: Si se trata de una secuencia de acciones, deberemos usar el principio multiplicativo. Si se trata de una sola acción que presenta distintas alternativas de realización, deberemos usar el principio aditivo.

Ejemplo 1.30. MEDIO DE TRANSPORTE. Para viajar de México a Ensenada se puede optar por avión, autobús o tren; existen tres rutas para el avión, cuatro para el autobús y dos para el tren. ¿Cuántas rutas hay para viajar?
Los tres medios alternativos de transporte son disyuntivas a elegir; al optar por una de ellas, las otras dos quedan excluidas; por lo tanto es aplicable el principio aditivo. El número de maneras diferentes en que podemos viajar de México a Ensenada son: $3 + 4 + 2 = 9$.



Factorial de un número.

El factorial de un número es el producto consecutivo de todos los números enteros, desde el uno hasta el número dado n, inclusive. Notación: $n!$

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-2) \times (n-1) \times n \qquad \text{\_\_\_\_ (1.15)}$$

Por así convenir, invocando la propiedad conmutativa de la multiplicación, la fórmula (1.18) se escribe más comúnmente como:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 \qquad \text{\_\_\_\_ (1.15')}$$

Considerando que: $(n-1)! = (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1,$ e invocando ahora la propiedad asociativa de la multiplicación, la fórmula (1.15') se puede escribir:

$$n! = n(n-1)! \qquad \text{\_\_\_\_ (1.16)}$$

que es la llamada fórmula fundamental del factorial.

Para que la expresión (1.19) tenga validez para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se define:

$$0! = 1$$

Para valores grandes de n ($n \geq 15$), se puede utilizar la fórmula de Stirling para obtener una buena aproximación del factorial de n: $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

El factorial de un número se puede generalizar para cualquier número real n mediante la función gamma, definida como: $n! = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = \Gamma(n+1)$

O bien: $\Gamma(n) = (n-1)!, \quad \forall n \in \mathbb{R}^+$

Ejemplo 1.31. FACTORIAL. Realice las siguientes operaciones:

a) $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

b) $7!/3! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!/3! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

c) $5!/2!3! = 5 \times 4 \times 3!/(2 \times 1 \times 3!) = 5 \times 4/(2 \times 1) = 20/2 = 10$

El principio fundamental del conteo, combinado con la definición de factorial de un número, permite establecer una serie de fórmulas generales, que en seguida veremos, y que facilitan, de manera significativa, el cálculo del cardinal asociado al espacio muestral finito correspondiente a cada caso.

Cabe señalar, sin embargo, que el uso de tales fórmulas no se debe hacer en forma indiscriminada, tratando de adivinar cuál de todas será la que nos permite resolver un problema en particular. Es esencial considerar la formulación del problema, en términos del principio fundamental del conteo, dibujando un diagrama de árbol, identificando cuándo es aplicable el principio multiplicativo y cuándo el aditivo, cuando importa el orden de los resultados y cuándo no, y cuándo es permisible repetir resultados y cuándo no.

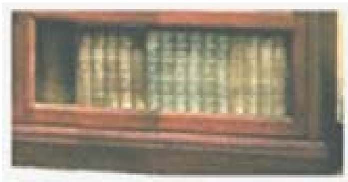
1.3.3 PERMUTACIONES

Se llaman permutaciones de n objetos a las diferentes maneras en que se pueden ordenar esos n objetos; todas las permutaciones constan de los mismos n elementos, pero se consideran diferentes, por el orden en que se colocan éstos. Notación: P_n

Para calcular el número de permutaciones que se pueden formar con los n objetos, se hacen las siguientes consideraciones: la elección del primer objeto se puede hacer de n maneras diferentes; la elección del segundo objeto se puede hacer de $(n - 1)$ maneras diferentes,..., y la elección del n-ésimo objeto sólo se puede hacer de una manera. Ahora, invocando el principio fundamental del conteo se tiene: $P_n = n(n-1)(n-2)...3\times 2\times 1,$ que nos conduce a la definición de factorial:

$$P_n = n! \qquad \text{\_\_\_\_\_ (1.17)}$$

Ejemplo 1.32. LIBROS. Si en el librero de tu casa hay 15 diferentes libros, 6 de los cuales son de matemáticas, 4 son de química y 5 son de física,



a) ¿De cuántas maneras diferentes puedes acomodarlos en el librero?

$$P_{15} = 15! = 1,307,674,368,000 \text{ maneras}$$

b) ¿De cuántas maneras diferentes puedes acomodarlos en tu librero, si los de cada materia deben quedar juntos?

El considerar que los libros de cada materia deben quedar juntos implica distinguir las 3 materias como 3 objetos que se pueden permutar: el primer objeto es el grupo de libros de matemáticas, el segundo objeto es el grupo de libros de química y el tercer objeto es el grupo de libros de física. El número de maneras en que se pueden permutar estos 3 objetos es: $P_3 = 3! = 6.$

Los 6 libros de matemáticas se pueden permutar de $P_6 = 6! = 720$ maneras; los 4 libros de química se pueden permutar de $P_4 = 4! = 24$ maneras; y los 5 libros de física se pueden permutar de $P_5 = 5! = 120$ maneras.

Por el principio fundamental del conteo, el número total de maneras en que se pueden colocar los 15 libros en el librero, haciendo que los de cada materia queden juntos es:

$$P_3(P_6P_4P_5) = 3!6!4!5! = 6x720x24x120 = 12'441,600 \text{ maneras}$$

Permutaciones circulares

Se llaman permutaciones circulares de n objetos a las diferentes maneras en que se pueden colocar esos n objetos alrededor de un círculo; en este tipo de permutaciones, lo que importa son las posiciones relativas de los objetos con respecto a ellos mismos y no las posiciones absolutas de los objetos en el círculo. Notación: PC_n.

Existen n permutaciones lineales que, al ser colocadas en círculo, conducen a una misma permutación circular, porque cada objeto queda en la misma posición relativa respecto a los $(n - 1)$ objetos restantes; de manera que por cada permutación circular hay n permutaciones lineales equivalentes.

Entonces, para calcular el número de permutaciones circulares de n objetos, se divide el número de permutaciones lineales de n objetos entre las n permutaciones equivalentes:

$$PC_n = P_n / n = n!/ n = (n-1)! \qquad (1.18)$$

Ejemplo 1.33. JUNTA DE COMITÉ. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar 6 personas, para una junta de comité?

a) En fila: $P_6 = 6! = 720$ maneras

b) En fila, si dos personas deben quedar juntas:
$P_5 P_2 = 5!\,2! = 120 \times 2 = 240$ maneras

c) Alrededor de una mesa: $PC_6 = (6-1)! = 5! = 120$ maneras

d) Alrededor de una mesa, si dos personas deben quedar siempre juntas:
$PC_5 P_2 = (5-1)!\,2! = 24 \times 2 = 48$ maneras

Permutaciones con grupos de objetos iguales

Se llaman permutaciones de n objetos, con r grupos de objetos iguales a las diferentes maneras distinguibles en que se pueden ordenar esos n objetos, de manera que los n_1 objetos iguales entre sí, los n_2 objetos iguales entre sí,..., y los n_r objetos iguales entre sí, al permutarse entre ellos por grupo, no pueden distinguirse unos de otros. Notación: $P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_r}$

Existen n_1 permutaciones lineales que conducen a una sola permutación distinguible, porque las permutaciones de los n_1 objetos iguales no son distinguibles entre sí; existen n_2 permutaciones lineales que conducen a una sola permutación distinguible, porque las permutaciones de los n_2 objetos iguales no son distinguibles entre sí; ... y existen nr permutaciones lineales que conducen a una sola permutación distinguible, porque las permutaciones de los n_r objetos iguales no son distinguibles entre sí. De manera que por cada permutación distinguible hay n_1 permutaciones lineales equivalentes, por cada permutación distinguible hay n_2 permutaciones lineales equivalentes,..., y por cada permutación distinguible hay n_r permutaciones lineales equivalentes.

Entonces, para calcular el número de permutaciones distinguibles de n objetos, se divide el número de permutaciones lineales de n objetos entre las n_1! permutaciones equivalentes, entre las n_2! permutaciones equivalentes,..., y entre las n_r! permutaciones equivalentes: $P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_r} = \dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_r!}$ (1.19)

Ejemplo 1.34 TORNILLOS. Si para fijar una placa se cuenta con 7 tornillos: 2 son de acero al carbón, 3 son de acero inoxidable y 2 son de bronce. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar tales tornillos, si se distingue el material del que están hechos?

$$P_7^{2,3,2} = \frac{7!}{2!3!2!} = \frac{5040}{24} = 210 \text{ maneras}$$

Ejemplo 1.35. TELÉGRAFO. ¿Cuántos mensajes telegráficos diferentes se pueden enviar utilizando exactamente 4 puntos y 5 rayas?

$$P_9^{4,5} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{362880}{2880} = 126 \text{ mensajes}$$

1.3.4 ORDENACIONES

Se llaman ordenaciones de n objetos de orden r a las diferentes maneras de escoger secuencialmente r objetos de entre n posibles, de modo cada una de las ordenaciones es distinta de las demás, si difiere en alguno de sus objetos o en el orden de ellos. Notación: O_n^r

Para calcular el número de ordenaciones de r objetos que se pueden formar con los n objetos disponibles, se hacen las siguientes consideraciones: la elección del primer objeto se puede hacer de n maneras diferentes; la elección del segundo objeto se puede hacer de $(n - 1)$ maneras diferentes,..., y la elección del r-ésimo objeto se puede hacer de $(n - r + 1)$ maneras diferentes. Ahora, invocando el principio fundamental del conteo se tiene:

$$O_n^r = n(n-1)(n-2)...(n-r+2)(n-r+1)$$

expresión que al multiplicar y dividir por $(n - r)!$ conduce a:

$$O_n^r = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+2)(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!}$$

e invocando la fórmula fundamental del factorial, tenemos:

$$O_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad \text{—— (1.20)}$$

Para la deducción de esta fórmula, se ha considerado implícitamente que el número r de objetos a elegir es menor o igual que el número de objetos disponibles: $r \leq n$, lo que equivale a no permitir la repetición de objetos en una misma ordenación. El caso particular en el que $r = n$, conduce a la obtención de las ordenaciones de n objetos tomados todos a la vez, es decir, a la obtención de la permutaciones de los n objetos:

$$O_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! = P_n$$

Ejemplo 1.36. SALÓN DE CLASE. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar los 52 alumnos del grupo de Probabilidad en un salón que dispone de 60 plazas?
El primer alumno que entra al salón puede escoger su lugar de entre 60 posibles, el segundo puede escoger lugar de entre 59 posibles,... y así, sucesivamente, hasta el alumno número 52, que puede escoger lugar de entre 9 posibles. Evidentemente, 8 de los 60 lugares quedarán vacíos; se trata de calcular las ordenaciones de 60 objetos de orden 52:

$$O_{60}^{52} = \frac{60!}{(60-52)!} = \frac{60!}{8!} = \frac{60 \times 59 \times 58 \times \ldots \times 9 \times 8!}{8!} = 2.06374 \times 10^{77} \text{ maneras}$$

Ordenaciones con repetición

Se llama ordenaciones con repetición de n objetos, de orden r a las diferentes maneras de efectuar secuencialmente r acciones, cada una de las cuales se puede presentar de n distintas maneras. El hecho de permitir la repetición de objetos, hace que el valor de r no esté restringido, pues el número r de acciones a efectuar puede ser mayor al número n de maneras en que puede presentarse cada una de ellas. Notación: OR_n^r

Para calcular el número de ordenaciones con repetición de r objetos que se pueden formar con n objetos disponibles, se hacen las siguientes consideraciones: la elección del primer objeto se puede hacer de n maneras diferentes; la elección del segundo objeto se puede hacer de n maneras diferentes,..., y la elección del r-ésimo objeto se puede hacer de n maneras diferentes. Ahora, invocando el principio fundamental del conteo se tiene: $OR_n^r = n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n$

$$OR_n^r = n^r \qquad \text{\_\_\_\_ (1.21)}$$

Ejemplo 1.37. MONEDAS. Considere el experimento consistente en lanzar tres monedas simultáneamente y observar las caras que quedan hacia arriba. Determine el número de maneras en que puede ocurrir tal experimento.
Nótese que el experimento consistente en lanzar tres monedas simultáneamente es equivalente al experimento de lanzar una moneda tres veces consecutivamente, que fue planteado y resuelto en el ejemplo 1.27.

$$OR_{2^3} = 2^3 = 8$$

Ejemplo 1.38. PLACAS. Las placas para automóvil en el D. F. están formadas por 6 caracteres: los 3 primeros son dígitos y los 3 últimos son letras. ¿Cuántas placas diferentes se pueden hacer?
Este problema ya fue planteado y resuelto en el ejemplo 1.26, utilizando el principio fundamental del conteo. Ahora lo haremos mediante la fórmula de ordenaciones con repetición, sin olvidar que no es permitido el arreglo 000 en la primera parte de una placa:

$$\left(OR_{10}^3 - 1\right) \times OR_{26}^3 = \left(10^3 - 1\right)\left(26^3\right) = 17'558,424 \text{ maneras}$$

1.3.5 COMBINACIONES

Se llaman combinaciones de n objetos de orden r a los distintos grupos que se pueden formar al escoger secuencialmente r objetos de entre n posibles, de modo cada una de las combinaciones es distinta de las demás, si difiere en uno de sus objetos por lo menos, sin importar el orden. Notación: C_n^r
Para calcular el número de combinaciones de r objetos que se pueden formar con los n objetos disponibles, se considera que, por cada combinación de r objetos, existen $r!$ ordenaciones equivalentes de r objetos; en efecto, cada combinación de r objetos se puede permutar de $r!$ maneras diferentes, generando $r!$ ordenaciones. De modo que basta con dividir el número de ordenaciones de n objetos de orden r, entre las permutaciones de r objetos para obtener las combinaciones de n objetos de orden r: $C_n^r = \dfrac{O_n^r}{P_r} = \dfrac{n!/(n-r)!}{r!}$

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad \text{\_\_\_\_ (1.22)}$$

Ejemplo 1.39. BARAJA INGLESA. ¿Cuántas manos diferentes le pueden tocar a un jugador de poker?

Una mano de poker es de 5 cartas y la baraja inglesa consta de 52; por ende, en cada mano se obtiene, de una en una, la muestra de 5 cartas distintas; para efectos de conteo, a esta manera de tomar la muestra se le denomina muestreo sin reemplazamiento. La primera carta puede ser cualquiera de la 52, la segunda puede ser cualquiera de las 51 restantes,..., y la quinta, que puede ser cualquiera de las 48 que quedan.

El orden en el que salen las carta no importa y evidentemente no se permite la repetición; por lo tanto, son combinaciones de 52 objetos tomados de 5 en 5.

$$C_{52}^5 = \frac{52!}{5!47!} = \frac{52\times 51\times 50\times 49\times 48\times \cancel{47!}}{5\times 4\times 3\times 2\times 1\times \cancel{47!}} = \frac{311'875,200}{120} = 2'598,960$$

Ejemplo 1.40. BOLIBOL. Si en el grupo 20 de "Probabilidad" hay 14 estudiantes mujeres, ¿cuántos partidos diferentes de volibol se podrían realizar, si cada equipo es de 6 jugadoras?

Es necesario considerar la conformación de dos equipos: El primer equipo se puede formar de C_{14}^6 maneras, pues se pueden elegir 6 jugadoras diferentes de entre 14 disponibles; el segundo equipo se puede formar de C_8^6 maneras, pues ahora se eligen 6 jugadoras de entre las 8 mujeres que quedan disponibles.

El producto de estas dos combinaciones, invocando el principio fundamental del conteo, proporciona el número de partidos que pueden realizarse, pero cada uno de ellos está considerado dos veces, pues una misma sexteta puede pertenecer a ambas combinaciones; el problema se resuelve dividiendo el producto de las dos combinaciones, entre las permutaciones de los 2 equipos:

$$\frac{C_{14}^6 C_8^6}{P_2} = \frac{1}{2!}\frac{14!}{6!8!}\frac{8!}{6!2!} = \frac{1}{2}\frac{2162160}{720}\frac{56}{2} = 42,042 \text{ partidos}$$

En todas las culturas de la Antigüedad estuvieron presentes implícita o explícitamente los temas combinatorios. Por ejemplo, el famoso libro "*I Ching*", que se empezó a escribir hacia el 1200 a.C., aunque su propósito era el oráculo, su estructura condujo a valorarlo matemáticamente, ya que en él se implica un sistema de numeración binario, geométrico y aritmético, y el uso de permutaciones. Con cada tirada de tres monedas genera una línea continua, representativa de todos los números impares, o bien una línea partida, que representa a todos los pares; con tres lanzamientos de las monedas se obtiene un trigrama, de 8 posibles, que se traza sobre papel, de abajo hacia arriba; con otros tres lanzamientos se obtiene un segundo trigrama, que al superponerse al anterior forma un hexagrama, de 64 posibles; con los dos trigramas obtenidos, se busca en una tabla el número que resulta de la combinación de ambos: filas para el primero y columnas para el segundo, y a partir de él se obtiene la interpretación de la respuesta del oráculo.

En el siglo III a.C. Pingala escribió el "*Chandahsutra*", el primer tratado en sánscrito sobre la prosodia; interesado en la pureza de la expresión, quería saber de cuántas maneras se podría formar una métrica védica de seis sílabas, con sílabas cortas y largas, y mediante el cálculo de permutaciones y combinaciones, obtuvo la primera descripción conocida de un sistema de numeración binario; también encontró el número de métricas que tenían n notas largas y k notas cortas, lo que fue equivalente a encontrar los coeficientes binomiales.

Luego, las aportaciones registradas sobre análisis combinatorio fueron aisladas. Los griegos tuvieron que enfrentar y resolver problemas de combinatoria, pero no hay evidencia de que hayan desarrollado teoría al respecto. De los romanos, que se caracterizaron por su desinterés por las matemáticas, sólo se destaca Boecio, en el siglo V, con la regla para encontrar las combinaciones de n objetos tomados de 2 en 2. En la India, en el siglo XI, Bhaskara dio reglas para calcular ordenaciones y combinaciones con y sin repetición, así como sus aplicaciones. En 1321 el judío francés Levi ben Gershon, conocido como Gersónides, en su libro de aritmética "*Maaseh Hoshev*", incluyó identidades combinatorias y coeficientes binomiales. También en el siglo XIV, Nicolás de Oresme realizó cálculos combinatorios, expresándolos retóricamente, como correspondía a su época. Hacia 1540, el italiano Tartaglia parece haber utilizado los conceptos combinatorios en estudios sobre el juego de dados, así como en el cálculo de la potencia de un binomio. En 1559, el francés Jean Borrel, mejor conocido como Buteo, mostró su gran conocimiento de las leyes de la combinatoria en su libro "*Logística*", donde presentó un esquema para la construcción de un candado de combinación, formado por varios cilindros rotatorios, que al coincidir en la permutación correcta, permitían su apertura. La idea original de convertir números en palabras, como métodos mnemotécnicos, se le atribuye al francés Pierre Hérigone en su "*Cursus Mathematicus*", de 1634, donde aparece la fórmula C_n^r explícitamente.

Ejemplo 1.41. TENIS. ¿Cuántos partidos diferentes de tenis dobles mixtos se pueden organizar con 4 hombres y 5 mujeres? Cada equipo de dobles mixto lo juegan 1 hombre y 1 mujer.

Primero consideremos la conformación de cada uno de los equipos. El primer equipo se forma con 1 hombre de entre 4: C_4^1 y 1 mujer de entre 5: C_5^1; el segundo equipo se forma con 1 hombre de entre los 3 que quedan: C_3^1 y 1 mujer de entre las 4 que quedan: C_4^1

El producto de las dos primeras combinaciones proporciona el número de maneras de conformar el primer equipo ($C_4^1 C_5^1 = 4 \times 5 = 20$); el producto de las dos últimas combinaciones proporciona el número de maneras de conformar el segundo equipo ($C_3^1 C_4^1 = 3 \times 4 = 12$).

Apelando al principio fundamental del conteo, se realiza el producto de esos dos valores ($20 \times 12 = 240$), pero en ellos se está incluyendo dos veces cada partido, porque una misma pareja puede estar en el primer equipo o en el segundo; el problema se resuelve dividiendo el producto anterior, entre las permutaciones que se pueden hacer entre los 2 equipos:

$$\frac{C_4^1 C_5^1 C_3^1 C_4^1}{P_2} = \frac{20 \times 12}{2!} = 120 \text{ partidos}$$

La capacidad combinatoria es un componente fundamental del pensamiento formal; es esencial para entender a plenitud el desarrollo de la probabilidad. El centro de atención ha de estar en el razonamiento recursivo y en los procedimientos sistemáticos de enumeración y no en las definiciones de las operaciones combinatorias ni en los algoritmos. Es evidente la conveniencia del uso de diagramas de árbol, porque facilitan la generalización, al permitir extender un procedimiento a cualquier número de elementos y adaptarlo a nuevos problemas derivados.

Números combinatorios

Los números de la forma $n!/r!(n - r)!$ son muy útiles en diversos tópicos matemáticos, reciben el nombre de números combinatorios y, para designarlos, se emplea un símbolo especial como notación:

$$\binom{n}{r} = C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad \text{(1.23)}$$

donde n es el grado del número combinatorio, y r es el orden del número combinatorio, $0 \le r \le n$. Cabe señalar que, en otros contextos, sin embargo, los números combinatorios se pueden definir para cualquier $n \in \mathbb{R}$ y para cualquier $r \in \mathbb{N}$.

Los números combinatorios tienen varias propiedades que conviene conocer:

a) Los números combinatorios de orden cero valen uno: $\binom{n}{0} = 1$

b) Los números combinatorios de orden n valen uno: $\binom{n}{n} = 1$

c) Los números combinatorios de orden 1 valen n: $\binom{n}{n} = 1$

d) Los números combinatorios de órdenes complementarios son iguales entre sí:

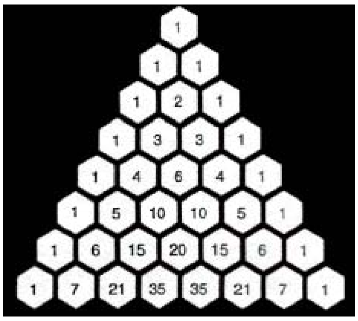
$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

e) Cada número combinatorio de grado r y orden r ($r \neq 0,\ r \neq n$), se puede obtener de sumar dos números combinatorios, uno del mismo orden, el otro de un orden inferior y ambos de un grado inferior: $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n+1}{r-1}$

Triángulo de Pascal

Los números combinatorios de todos los grados y de todos los órdenes se pueden acomodar en un arreglo triangular de la forma:

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{0} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{0} \quad \binom{2}{0} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6} \\
\cdots
\end{array}$$



Este arreglo triangular de los números combinatorios se conoce con el nombre de Triángulo de Pascal, el que también puede ser expresado, sustituyendo los números combinatorios por sus valores numéricos, como triángulo aritmético:

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
\cdots
\end{array}$$

Las propiedades de los números combinatorios analizados previamente, se verifican claramente al observar los dos triángulos anteriores. En efecto:

- Los números combinatorios que están en los extremos de cada línea valen 1.
- Los números combinatorios que se encuentran colocados simétricamente respecto a la vertical que pasa por el vértice superior, son iguales.
- La suma de dos números combinatorios adyacentes pertenecientes a la misma línea horizontal, es igual al número combinatorio localizado inmediatamente debajo de ellos.

El "Meru Prastara", atribuido a Pingala y datado en el siglo II a.C., fue la primera versión de lo que hoy conocemos como triángulo de Pascal. En los escritos de Al Karaji, del siglo X, y de Omar Kayyam, del siglo XI, existen referencias a ese triángulo. En Occidente, Blaise Pascal lo redescubrió en el siglo XVII y por eso lleva su nombre.

1.3.6 TEOREMA DEL BINOMIO

Los números combinatorios también reciben el nombre de coeficientes binomiales, en virtud de que sus valores corresponden a los coeficientes del desarrollo de un binomio $(a+b)^n$. En efecto, si n es un entero no negativo:

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)...(a+b) \quad (n \text{ factores})$$

Al realizar la multiplicación, cada término del binomio desarrollado: $aa...abb...b$, es el producto de n factores: r literales a y $(n-r)$ literales b, que en forma abreviada se expresa: $a^r b^{n-r}$; el número de términos de la forma $a^r b^{n-r}$ se obtiene de contar el número de maneras en que se pueden elegir r literales a, de n disponibles, o de elegir $(n-r)$ literales b, de n disponibles, lo cual está dado por el número combinatorio C_n^r

Así, el número de términos de la forma $a^n b^0$ es C_n^0, el número de términos de la forma $a^{n-1}b^1$ es C_n^1, el número de términos de la forma $a^{n-2}b^2$ es C_n^2 ,..., y el número de términos de la forma $a^0 b^n$ es C_n^n. Por lo que el desarrollo del binomio se puede expresar:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n$$

y en forma sintética se obtiene la expresión que se conoce como Teorema del Binomio de Newton: $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$ ____ (1.24)

Ahora bien, si en la expresión (1.24) se hace: $a = b = 1$, se obtiene:

$$(1+1)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n \qquad \text{____ (1.25)}$$

expresión que proporciona el número de combinaciones de todos los órdenes.

Ejemplo 1.42. EQUIPO DE BOMBEO. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar una o más marcas de bombas centrífugas para una refinería, de entre 15 que se ofertan?

El número de combinaciones de todos los órdenes es: $2^{15} = 32{,}768$; pero este resultado incluye la combinación $C_{15}^0 = 1$, que debe restarse. De modo que el número de maneras en que se pueden seleccionar una o más marcas de bombas centrífugas para una refinería, de entre 15, es $32{,}767$.

Pascal fue el primero en percatarse de la relación de igualdad entre los números combinatorios y los coeficientes binomiales.

Teorema generalizado del binomio

Los coeficientes binomiales tienen un significado muy claro cuando n y r son enteros no negativos, con $0 \le r \le n$:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)\cancel{(n-r)!}}{r!\cancel{(n-r)!}} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!}$$

La expresión anterior también tiene sentido si n es un número real cualquiera, en tanto r sea entero no negativo:

$$\binom{-r}{n} = \frac{r!}{n!(-r-n)!} = \frac{-r(-r-1)(-r-2)...(-r-n)!}{n!(-r-n)!} = \frac{-r(-r-1)(-r-2)...(-r-n+1)}{n!}$$

$$= (-1)^n \frac{(r+n-1)(r+n-2)...r}{n!} = (-1)^n \frac{(r+n-1)!}{n!(r-1)!} = (-1)^n \binom{r+n-1}{n}$$

Utilizando esta versión extendida de los coeficientes binomiales, el teorema del binomio se generaliza a través de una expresión que involucra una serie infinita:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k \qquad \text{\_\_\_\_ (1.26)}$$

Esta serie tiene significado para cualquier n real y para todo valor de x tal que $|x| < 1$. Sólo si n es un entero positivo, la serie tiene un número finito de términos.

Ejemplo 1.37. TEOREMA DEL BINOMIO. Calcule los valores de $(1.5)^4$ y $(1.5)^{-4}$ a través del teorema generalizado del binomio como serie infinita:

$$(1+0.5)^4 = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{4}{k}x^k = \frac{4!}{0!4!}(0.5)^0 + \frac{4!}{1!3!}(0.5)^1 + \frac{4!}{2!2!}(0.5)^2 + \frac{4!}{3!1!}(0.5)^3 + \frac{4!}{4!0!}(0.5)^4$$

$$= 1 + 2 + 1.5 + 0.5 + 0.0625 = 5.0625$$

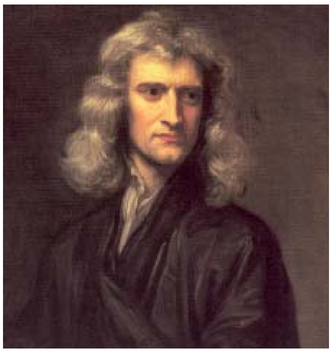
$$\binom{-4}{k} = \frac{-4!}{k!(-4-k)!} = \frac{(-4)(-5)(-6)...(-4-k)!}{k!(-4-k)!} = \frac{(-4)(-5)(-6)...(-4-k+1)}{k!}$$

$$= (-1)^k\frac{(4+k-1)(4+k-2)...6\cdot5\cdot4}{k!} = (-1)^k\frac{(4+k-1)!}{k!(4-1)!} = (-1)^k\binom{4+k-1}{k}$$

$$(1+0.5)^{-4} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-4}{k}(0.5)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{4+k-1}{k}(0.5)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{4+k-1}{k}(-0.5)^k$$

$$= \frac{3!}{0!3!}(-0.5)^0 + \frac{4!}{1!3!}(-0.5)^1 + \frac{5!}{2!3!}(-0.5)^2 + ... + \frac{(4+k-1)!}{k!3!} + ...$$

$$= 0.197530864$$



Se cree que el teorema del binomio, como tal, fue descubierto por el ingeniero persa Al Karaji, hacia el año 1000; su primera publicación, empero, fue realizada por John Wallis, en 1685, atribuyendo a Isaac Newton el descubrimiento. Basado en los métodos de interpolación y extrapolación contenidos en la Aritmética de Wallis, Newton desarrolló sus propias investigaciones sobre series infinitas, el teorema del binomio y su generalización.

1.3.7 PROBLEMAS CLÁSICOS

Proporciones a favor y en contra

Procedente del mundo del juego, hay otra manera de representar la probabilidad de ocurrencia de un evento: la relación entre el número de oportunidades a favor del evento y el número de oportunidades en contra, ambos expresados como enteros. En inglés, esta relación se denomina “odds”, para el que no existe un vocablo equivalente en castellano y por lo que no existe una traducción comúnmente aceptada. Un “odds” indica cuanto más probable es que el evento ocurra a que no ocurra; un odds $4:1$ se lee “cuatro a uno”, se interpreta como que hay 4 oportunidades a favor por 1 en contra y es equivalente a decir que la probabilidad es $4/5$; un odds $1:1$ se lee “uno a uno”, significa que hay equiprobabilidad, con tantas oportunidades a favor como en contra y es equivalente a decir que la probabilidad es $1/2$.

Cardano ejemplificó el concepto con un juego en el que al lanzar dos dados, un jugador ganaría si en el tiro aparecía un *1*, un *2* o un *3*; había entonces *27* oportunidades de ganar, de *36* posibles: (*1,1*), (*1,2*), (*1,3*), (*1,4*), (*1,5*), (*1,6*), (*2,1*), (*2,2,*), (*2,3*), (*2,4*), (*2,5*), (*2,6*), (*3,1*), (*3,2*), (*3,3*), (*3,4*), (*3,5*), (*3,6*), (*4,1*), (*4,2*), (*4,3*), (*5,1*), (*5,2*), (*5,3*), (*6,1*), (*6,2*), (*6,3*); y evidentemente había *9* oportunidades de perder, de manera que en este caso, la proporción sería *27:9* o *3:1*, y en forma equivalente, la probabilidad de ganar sería de *27/36 = 3/4* y la probabilidad de perder *9/36 = 1/4*.

Galileo y los tres dados

Cosme II de Medici, duque de Toscana era jugador contumaz de dados y observó que en un juego en el que se suman los puntos obtenidos al lanzar tres dados, siempre era más frecuente el *10* que el *9*, y no entendía por qué, ya que ambas sumas se obtienen de *6* maneras: para el *9*: (*1, 2, 6*), (*1, 3, 5*), (*1, 4, 4*), (*2, 2, 5*), (*2, 3, 4*), (*3, 3, 3*), y para el *10*: (*1, 3, 6*), (*1, 4, 5*), (*2, 2, 6*), (*2, 3, 5*), (*2, 4, 4*), (*3, 3, 4*).

El duque consultó el problema con su protegido y otrora maestro Galileo, quien le explicó a detalle una solución, basada en algo muy simple: los resultados (*1, 2, 6*), (*1, 6, 2*), (*2, 1, 6*), (*2, 6, 1*), (*6, 1, 2*) y (*6, 2, 1*) son distintos, *6* ordenaciones de una misma combinación, los resultados (*1, 4, 4*), (*4, 1, 4*) y (*4, 4, 1*) son distintos, 3 ordenaciones de una misma combinación, y finalmente el resultado (*3, 3, 3*) es una combinación que sólo tiene una ordenación posible. En efecto, las frecuencias de la suma *9* y de la suma *10* son:

$$f(9) = O_{621} + O_{531} + O_{522} + O_{441} + O_{432} + O_{333} = 6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 25$$

$$f(10) = O_{631} + O_{622} + O_{541} + O_{532} + O_{442} + O_{433} = 6 + 3 + 6 + 6 + 3 + 3 = 27$$

Por simetría: $f(11) = f(10) = 27$ y $f(12) = f(9) = 25$

Galileo concluyó que es preferible apostarle al *10* y al *11*, antes que al *9* y al *12*, porque con el *10* y con el *11* hay *27* posibilidades, mientras que con el *9* y con el *12* sólo hay *25*. Y el Gran Duque aprendió a distinguir ordenaciones de combinaciones.

El error de D'Alembert

Jean D'Alembert fue un famoso matemático francés del siglo XVIII, a quien en 1754 le fue planteado el problema de determinar la probabilidad de obtener al menos una cara cuando se lanzan dos monedas.

Es claro que el espacio muestral asociado a este experimento está formado por 4 puntos muestrales: *S* = {(*CC*), (*CX*), (*XC*), (*XX*)}; de estos *4* posibles resultados, 3 son favorables a que caiga al menos una cara: *A* = {(*CC*), (*CX*), (*XC*)}, por lo que la probabilidad buscada es 3/4.

Sin embargo, en su momento, D'Alembert razonó el problema de manera incorrecta, al considerar que las posibilidades eran: dos caras, dos cruces y una cara y una cruz; de estos 3 casos posibles, 2 eran favorables, por lo que la probabilidad buscada era 2/3. Para visualizar la solución del problema conviene realizar el experimento con dos monedas de diferente denominación.

D'Alembert recurrió a la definición clásica de probabilidad, pero pasó por alto uno de sus requisitos: que los puntos muestrales deben ser igualmente verosímiles, lo que no ocurre con la combinación CX, si no se establece la diferencia entre las permutaciones CX y XC. El error de D'Alembert es típico en quien se inicia en el estudio de la probabilidad, cuando su conocimiento de la disciplina aún no está maduro.

Apuestas ventajosas

Antoine Gombaud, Caballero de Méré fue un filósofo francés, aficionado a las matemáticas y experto jugador, que se interesó particularmente en el análisis riguroso del juego de dados, movido por sus inesperadas pérdidas. Gombaud recurrió a Pascal para que le explicara la razón, pues él sabía que era ventajoso apostar por obtener al menos un seis, en una serie de 4 lanzamientos de un dado, donde efectivamente ganaba; él supuso, que debía ser igualmente ventajoso apostar por obtener al menos un doble seis en una serie de 24 lanzamientos de un par de dados, pero con ello normalmente perdía. Supuso proporcionalidad y utilizó una regla de tres simple: 4 es a 6 igual que 24 a 36.

No se conoce la solución que dio Pascal al problema; se sabe que lo resolvió porque así se lo hizo saber a Fermat en una carta, invitándolo a descubrirla fácilmente, dados los principios que tenía.

En cada lanzamiento de un dado hay 6 posibles resultados; en una serie de 4 lanzamientos, los resultados posibles son: $OR_6^4 = 6^4 = 1296$.

Para calcular el número de resultados que contienen al menos un 6, conviene hacerlo por complemento, es decir, calculando primero los resultados con valores del 1 al 5, cuatro veces seguidas: $OR_5^4 = 5^4 = 625.$

Por lo tanto, el número de resultados que contienen al menos un seis es: $1296 - 625 = 671.$ Expresando esto en forma de proporción: $671 : 625,$ se distingue claramente la pequeña ventaja que tiene el que apuesta por al menos un seis en 4 lanzamientos del dado. Expresado como probabilidad: 0.5177

Del mismo modo, en cada lanzamiento de un par de dados hay 36 posibles resultados; en una serie de 24 lanzamientos, los resultados posibles son: $OR_{36}^{24} = 36^{24}.$

Para calcular el número de resultados que contienen al menos un doble seis, conviene hacerlo por complemento, es decir, calculando primero los resultados que no son un doble seis, veinticuatro veces seguidas: $OR_{35}^{24} = 35^{24}.$

Por lo tanto, el número de resultados que contienen al menos un seis es: $36^{24} - 35^{24}.$ Expresando esto en forma de proporción: $\left(36^{24} - 35^{24}\right) : 35^{24},$ se tienen que hacer operaciones para darse cuenta de la pequeña ventaja que tiene el que apuesta por al menos un doble seis en 24 lanzamientos de dos dados. Expresado como probabilidad: 0.4945

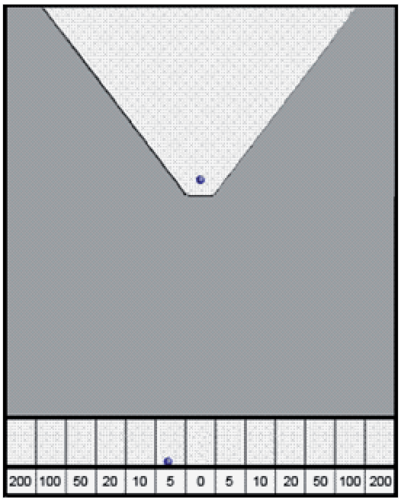
Al observar que la desventaja era tan pequeña, se hace difícil de creer que, efectivamente Gombaud la haya podido percibir empíricamente. Se sabe que el problemas ya llevaba bastante tiempo circulando entre los estudiosos de la época; otra posibilidad es que, habiendo llegado Gombaud a ese resultado, por si mismo, le surgieron dudas que quiso disipar con Pascal.

Es fácil darse cuenta que con 25 lanzamientos de un par de dados, en vez de 24, la desventaja se convierte en ventaja: $\left(36^{25} - 35^{25}\right) : 35^{25}$, con una probabilidad equivalente de 0.5055

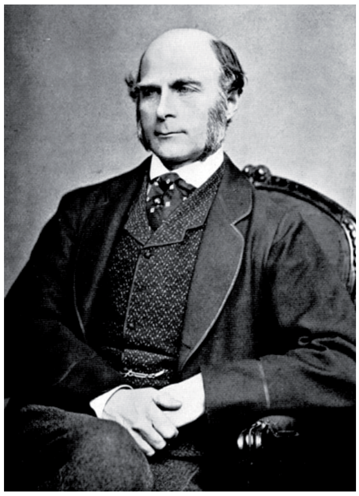
En condiciones de equidad, el problema podría ser planteado como la determinación del número de lanzamientos que garantizan el equilibrio, que ocurre cuando las probabilidades de ganar y perder coinciden.

Quincunx de feria

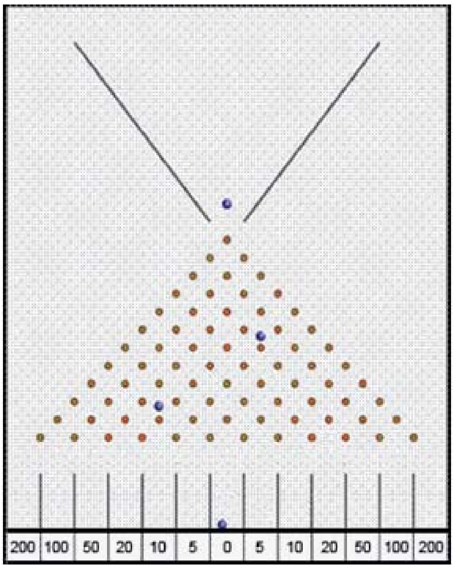
Todavía se llega a encontrar en algunas ferias un atractivo juego en el que por *\$20*, un participante puede ganar un premio de hasta *\$200*, introduciendo en un tablero una bolita, que baja por un embudo y siguiendo una trayectoria impredecible, sortea una serie de obstáculos ocultos, hasta finalmente caer al pié del tablero, en una de las *13* casillas posibles, abajo de cada una de las cuales están grabados los premios asignados a cada una.



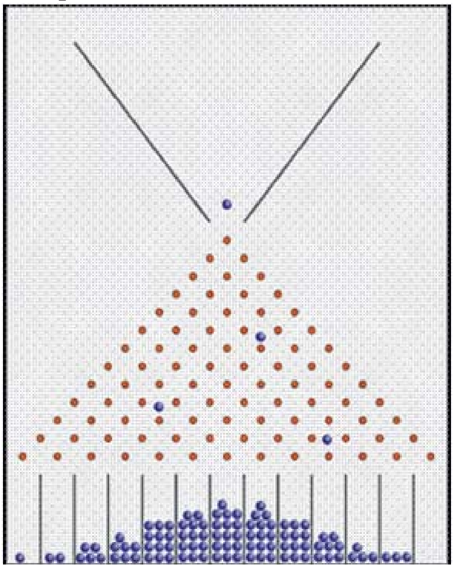
Tal aparato fue inventado por Sir Francis Galton y en su versión de feria, está formado por un tablero vertical sobre el que se han colocado doce filas de clavos intercalados uniformemente distribuidos, emulando la forma del triángulo de Pascal y la distancia entre clavos depende del diámetro de las bolitas, para que no se atoren; el arreglo de los clavos sigue el patrón “quincunx”, usual en la plantación de huertos, a base de líneas rectas, para uso eficiente del espacio, como repitiendo consistentemente el acomodo de los cinco puntos en un dado; de ahí que Galton lo denominara “*máquina Quincunx*”; .

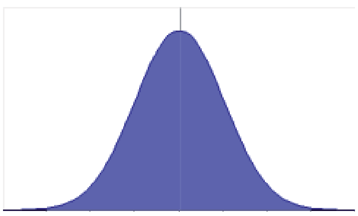


Lo que el participante no puede ver es la malla de clavos y el caso es que, al tropezar con cada uno de los clavos, hay *50-50%* de probabilidades de que la bolita caiga a la izquierda o a la derecha. La mayor parte de las veces, la bolita termina cayendo en las casillas centrales y, por supuesto, los buenos premios están en los extremos.



En el juego de feria cada bolita jugada se saca del tablero, para evitar confusiones. Pero el dueño del negocio sabe que si se dejaran caer un número suficiente de bolitas, por ejemplo *100*, se puede observar que éstas se amontonan en la parte central, adquiriendo forma de curva acampanada. Y siempre que se repita el experimento, las bolitas se acumularán de la misma forma. Esta curva recibe el nombre de campana de Gauss o curva normal.





El comportamiento secreto de las trayectorias de las bolitas está determinado por el triángulo de Pascal, pues las probabilidades de que las bolas tomen una u otra dirección son proporcionales a los números combinatorios que contiene dicho triángulo. Conforme a esto, si se dejaran caer 4096 bolitas en el aparato, la distribución teórica en las 13 casillas, sería como sigue:

4096
2048 2048
1024 2048 1024
512 1536 1536 512
256 1024 1536 1024 256
128 640 1280 1280 640 128
64 384 960 1280 960 384 64
32 224 672 1120 1120 672 224 32
16 128 448 896 1120 896 448 128 16
8 72 288 672 1008 1008 672 288 72 8
4 40 180 480 840 1008 840 480 180 40 4
2 22 110 330 660 924 924 660 330 110 22 2
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

Con 100 bolitas lanzadas, teóricamente se tendría que pagar $879 por concepto de premios:

P(·)	0.02	0.29	1.61	5.37	12.1	19.3	22.6	19.3	12.1	5.37	1.61	0.29	0.02	100
$/·	200	100	50	20	10	5	0	5	10	20	50	100	200	
$	4.88	29.3	80.6	107	121	96.7	0	96.7	121	107	80.6	29.3	4.88	879

Con un precio de participación de $20, el ingreso sería de $2000 y la ganancia para el negocio sería de $1121.

El jugador solo tiene una probabilidad de 2/4096 = 0.05% de obtener el premio máximo de $200 y la probabilidad de 24/4096 = 0.59% de obtener el premio de $100; pero su probabilidad de no recuperar su cuota de participación es de 3498/4096 = 85.4%. Así son los juegos de azar.

Gerolamo Cardano era un médico italiano de espíritu inquieto, que incursionó en varios campos del conocimiento, haciendo en ellos ricas aportaciones; como jugador empedernido que era, se interesó en usar las matemáticas para estudiar el comportamiento de los juegos de azar. Hacia 1565 escribió el "*Liber de ludo aleae*", pero habiendo sido acusado de herejía, cuando quedó libre, le fue prohibido publicar, así que su obra se dio a conocer hasta 1663, a 90 años de su muerte. En su tiempo, los juegos de azar tenían lugar en tabernas y mesones semiclandestinos, que sin embargo ofrecían a los jugadores condiciones de equidad; en toda su obra, los análisis matemáticos de Cardano partían del principio de igualdad que debe regir en todo juego de azar, porque para él, si esa igualdad de condiciones se rompe, si hay desventaja es una locura participar en el juego, y si hay ventaja, es injusto aprovecharse de ella.

Galileo Galilei también se interesó en los juegos de azar y hacia 1620 escribió una pequeña obra, inicialmente denominada "*Sopre le Scoperte dei dadi*", en la que a través de la expresión $6^3 = 216$, calculó el número de posibles resultados del lanzamiento de tres dados; también obtuvo el número de maneras diferentes como se pueden lograr cada una de las puntuaciones entre 3 y 18.

Con el declive del Renacimiento, se desmoronó la imagen del universo salvaguardada por el dogmatismo clerical, particularmente alrededor de Italia, por lo que, a mediados del siglo XVII, la situación ya había cambiado; los filósofos y los científicos ya podían publicar, sin ser acusados de herejía y los jugadores podían jugar, sin ser juzgados pecadores. Estos cambios contribuyeron al surgimiento de nuevos juegos de azar más sofisticados, con apuestas mucho más elevadas y a la aparición de un participante especial en el juego, la llamada Banca, que tendría una ventaja matemática a su favor sobre los demás apostadores. Quizá por ello, los jugadores se empezaron a interesar por las apuestas ventajosas, solicitando el auxilio de los matemáticos de la época; así fue como el Caballero de Meré involucró a Blaise Pascal y a Pierre de Fermat, en problemas de juego, dando origen formal al análisis combinatorio y a la teoría de la probabilidad. Todos los sabios pioneros usaron el cociente $N(A)/N$, pero no le llamaban probabilidad; para ellos, el problema consistía en contabilizar el número de resultados favorables y de resultados posibles.

En 1666, Gottfried Leibniz publicó su "*Ars Combinatoria*", que era una versión ampliada de su tesis doctoral; pero él mismo consideraría luego que ese trabajo suyo era inmaduro, no obstante ser del todo original.

Los resultados fundamentales del análisis combinatorio fueron abordados por Jacobo Bernoulli, en su obra póstuma de 1713, "*Ars Conjectandi*", el primer tratado importante sobre la teoría de las probabilidades, trabajo en el que incluyó una teoría general de permutaciones y combinaciones, así como el teorema del binomio, en la forma como se conoce en la actualidad.