UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
PRIMER EXAMEN PARCIAL
ÁLGEBRA LINEAL GRUPO 07
SEMESTRE 2023-2
RESOLUCIÓN

1. Sea el conjunto $A = \{0, 1, 2, 3\}$ donde se define la operación binaria

*	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Determina si el sistema $(A,*)$ forma un grupo abeliano, considera que la operación sí tiene la propiedad de asociatividad. Justifica tus respuestas.

SOLUCIÓN

i) Dado que al operar cualquier par de elementos los resultados son siempre elementos de A sí se cumple la cerradura.

ii) La asociatividad sí se cumple de acuerdo con el enunciado.

iii) Se observa que
$$0 * 0 = 0$$
$$0 * 1 = 1 * 0 = 1$$
$$0 * 2 = 2 * 0 = 2$$
$$0 * 3 * 3 * 0 = 3$$

Sí existe elemento idéntico y es $e = 0$

iv) Se tiene que
$$0 * 0 = 0$$
$$1 * 3 = 3 * 1 = 0$$
$$2 * 2 = 0$$
$$3 * 1 = 1 * 3 = 0$$

Es decir:
$$\hat{0} = 0$$
$$\hat{1} = 3$$
$$\hat{2} = 2$$
$$\hat{3} = 1$$

Sí existen elementos inversos

v) Se cumple que
$$0 * 1 = 1 * 0$$
$$0 * 2 = 2 * 0$$
$$0 * 3 = 3 * 0$$
$$1 * 2 = 2 * 1$$

$$1 * 3 = 3 * 1$$
$$2 * 3 = 3 * 2$$

Finalmente, sí es un grupo abeliano.

2. Sea el espacio vectorial real M_2 de las matrices cuadradas de $2\ x\ 2$ con elementos reales y sea el subconjunto

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 2ab \end{bmatrix} | a, b, c \ \in \mathbb{R} \right\}$$

Determina si A, con las operaciones usuales para la adición de matrices y multiplicación de una matriz por un escalar es un subespacio vectorial de M_2.

SOLUCIÓN

i) Sean $\begin{bmatrix} a & b \\ c & 2ab \end{bmatrix} \in A$ y $\begin{bmatrix} d & e \\ f & 2de \end{bmatrix} \in A$. Se debe cumplir:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & 2ab \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \\ f & 2de \end{bmatrix} \in A$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & 2ab \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \\ f & 2de \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d & b+e \\ c+f & 2ab+2de \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d & b+e \\ c+f & 2(ab+de) \end{bmatrix}$$
$$\neq \begin{bmatrix} a+d & b+e \\ c+f & 2(a+d)(b+e) \end{bmatrix}$$

No es un subespacio

3. Sea el subconjunto

$$T = \{3 - 4i, 4 + 3i\}$$

Del espacio vectorial $\mathbb{C} = \{a + bi \ | a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$

a) ¿T es linealmente independiente si $\mathbb{C}$ está asociado el campo real?
b) ¿T es linealmente independiente si $\mathbb{C}$ está asociado el campo complejo?

SOLUCIÓN

a) Es linealmente independiente pues $3 + 4i \neq a(4 - 3i)$ si $a \in \mathbb{R}$
b) Es linealmente dependiente pues $3 + 4i = i(4 - 3i)$

4. Sea $G = \{(-2, 1, -5), (1, -1, 4), (0, 1, -3)\}$ un subconjunto del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$

Determina:

a) Si G es un conjunto linealmente dependiente o independiente,
b) El espacio L generado por el conjunto G,
c) La dimensión del espacio L

SOLUCIÓN

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) G es linealmente dependiente.
b) El vector genérico del espacio es: $a(1,0,1)+b(0,1,-3)=(a,b,a-3b)$
El espacio generado queda: $L=\{(a,b,a-3b)|a,b\in\mathbb{R}\}$
c) $\dim L=2$

5. Sea el conjunto $A=\left\{\begin{bmatrix}2&0\\1&8\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2&0\\1&-4\end{bmatrix}\right\}$. Determina el espacio generado por los vectores del conjunto A y la base canónica de dicho espacio.

SOLUCIÓN
Sea el isomorfismo $F:M_2\to\mathbb{R}^3$ tal que $f\begin{bmatrix}a&0\\b&c\end{bmatrix}=(a,b,c)$, Las imágenes de los elementos de A son:

$$f\begin{bmatrix}2&0\\1&8\end{bmatrix}=(2,1,8), f\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}=(1,-1,1), f\begin{bmatrix}0&0\\1&2\end{bmatrix}=(0,1,2),$$
$$f\begin{bmatrix}-2&0\\1&-4\end{bmatrix}=(-2,1,-4)$$

Formemos una matriz:

$$N=\begin{bmatrix}2&1&8\\1&-1&1\\0&1&2\\-2&1&-4\end{bmatrix}$$

Obtengamos su espacio renglón:

$$\begin{bmatrix}2&1&8\\1&-1&1\\0&1&2\\-2&1&-4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&1&8\\0&1&2\\-2&1&-4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&3&6\\0&1&2\\0&-1&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\sim$$
$$\sim\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

El inverso del isomorfismo es:

$$f^{-1}(a\ b,c)=\begin{bmatrix}a&0\\b&c\end{bmatrix}$$

Entonces:

$$f^{-1}(1,0,3)=\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix},\quad f^{-1}(0,1,2)=\begin{bmatrix}0&0\\1&2\end{bmatrix}$$

Y la base canónica es:

$$B=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&2\end{bmatrix}\right\}$$

El elemento genérico:

$$a\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&0\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&0\\b&3a+2b\end{bmatrix}$$

Y el espacio generado:

$$L(A)=\left\{\begin{bmatrix}a&0\\b&3a+2b\end{bmatrix}|a,b\in\mathbb{R}\right\}$$