Alcance horizontal (R): Es la distancia horizontal que el proyectil ha recorrido cuando regresa a su altura inicial (lanzamiento). Para hallar el alcance R, hagamos $x - x_0 = R$ en la ecu (1) y $y - y_0 = 0$ en la ecu (2). $\Rightarrow$

$$R = (V_0 \cos\theta_0)t$$
$$0 = (V_0 \operatorname{sen}\theta_0)t + \frac{1}{2}gt^2$$

al eliminar t entre estas dos ecuaciones resulta

$$R = \frac{2V_0^2}{g}\operatorname{sen}\theta_0 \cos\theta_0$$

usando la identidad $\operatorname{sen}2\theta_0 = 2\operatorname{sen}\theta_0 \cos\theta_0$ obtenemos

$$\boxed{R = \frac{V_0^2}{g}\operatorname{sen}2\theta_0}$$ — ecu del desplazamiento horizontal cuando $y - y_0 = 0$.

R es máximo cuando $2\theta_0 = 1$ que sucede cuando $2\theta_0 = 90^\circ$ o $\theta_0 = 45^\circ$.

$\therefore$ el alcance horizontal máximo se obtiene con $\theta_0 = 45^\circ$.

Movimiento en 2 y 3 Dimensiones

① Vector posición $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$

② vector desplazamiento $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta x\hat{\imath} + \Delta y\hat{\jmath} + \Delta z\hat{k}$

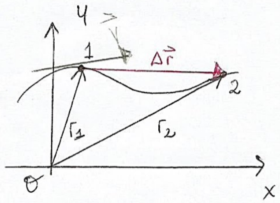
donde $\Delta x = (x_2 - x_1)$, $\Delta y = (y_2 - y_1)$, $\Delta z = (z_2 - z_1)$.

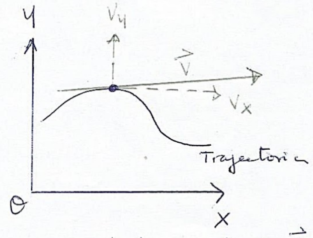
③ velocidad promedio: Si una partícula se mueve a través de un desplazamiento $\Delta\vec{r}$ en un intervalo de tiempo Δt, entonces su velocidad promedio V_{prom}

$$\vec{V}_{prom} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x\hat{\imath} + \Delta y\hat{\jmath} + \Delta z\hat{k}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\imath} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\jmath} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k}$$

④ Velocidad instantánea: Su velocidad de la partícula en un instante de tiempo, es decir, $\Delta t \to 0$.

$$\Rightarrow \vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$





V_x := componente tangencial de $\vec{V}$
V_y := componente normal de $\vec{V}$

$$\Rightarrow \vec{V} = \frac{d}{dt}(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k})$$

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = \underbrace{V_x\hat{\imath} + V_y\hat{k} + V_z\hat{k}}_{\text{componentes escalares de } \vec{V}}$$

Nota: la dirección de la velocidad instantánea de $\vec{V}$ de una partícula siempre es tangente a la trayectoria de la partícula en la posición de la partícula.

Aceleración Promedio y aceleración instantánea

Aceleración promedio $(\vec{a}_{prom}) = \dfrac{\vec{V}_1 - \vec{V}_2}{\Delta t} = \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

donde V_1 y V_2 son el cambio en la velocidad de la partícula en el intervalo temporal Δt.

Aceleración Instantánea $(\vec{a})$. La aceleración de la partícula en un instante de tiempo. $\Delta t \to 0$.

$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}}$ Si la $\vec{v}$ cambia ya sea en magnitud o dirección (o en ambas), la partícula tiene aceleración.

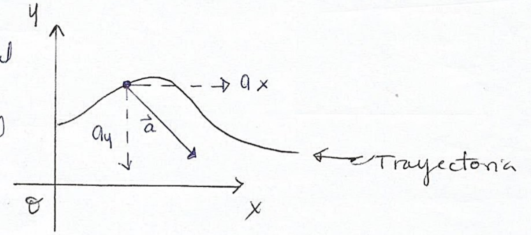
$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$

componentes escalares de la aceleración.

con $a_x = \dfrac{dV_x}{dt}$, $a_y = \dfrac{dV_y}{dt}$, $a_z = \dfrac{dV_z}{dt}$

a_x:= Componente tangencial de $\vec{a}$.

a_y:= Componente normal de $\vec{a}$.



Ejemplos sobre $\vec{V}_{prom}$, $\vec{V}$, $\vec{a}_{prom}$ y $\vec{a}$

① Un conejo atraviesa corriendo un lote de estacionamiento. Las coord. del conejo como función de t son:

$x = -0.31t^2 + 7.2t + 28$, $y = 0.22t^2 - 9.1t + 30$

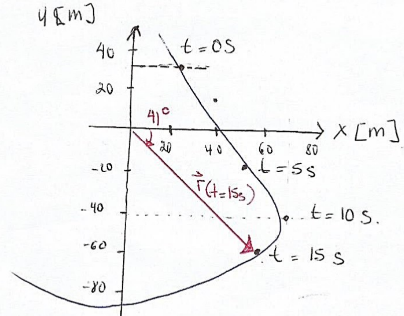
a) En $t = 15s$, ¿Cuál es el vector posición $\vec{r}$ del conejo en notación de vector unitario y como magnitud y ángulo?

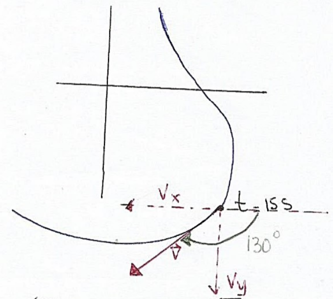
$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath}$.

luego $x(t=15s) = (-0.31)(15)^2 + (7.2)(15) + 28 = 66m$

$y(t=15s) = (0.22)(15)^2 - (9.1)(15) + 30 = -57m$

$\Rightarrow \vec{r}(t=15s) = \{66\hat{\imath} + 57\hat{\jmath}\}m$ $\quad \|\vec{r}(t=15s)\| = 87m$





b) Encuentre la velocidad $\vec{v}$ en $t = 15s$ como vector además de su magnitud y ángulo.

como $\vec{V} = V_x\hat{\imath} + V_y\hat{\jmath} = \dfrac{dx}{dt}\hat{\imath} + \dfrac{dy}{dt}\hat{\jmath}$.

$\Rightarrow V_x = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx(t)}{dt} = \dfrac{d}{dt}(-0.31t^2 + 7.2t + 28) = -0.62t + 7.2$

$\Rightarrow V_x(t=15s) = -2.1\, m/s$

luego. $V_y = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy(t)}{dt} = \dfrac{d}{dt}(0.22t^2 - 9.1t + 30) = 0.44t - 9.1$

$\Rightarrow V_y(t=15s) = -2.5\, m/s$

finalmente $\vec{V} = \{-(2.1)\hat{\imath} - 2.5\hat{\jmath}\}m/s$

$\|\vec{v}\| = 3.3 m/s$

$\theta = -130°$

c) Encuentre la aceleración $\vec{a}$ en el tiempo $t = 15\,s$, como vector cartesiano así como su magnitud y sentido. (4)

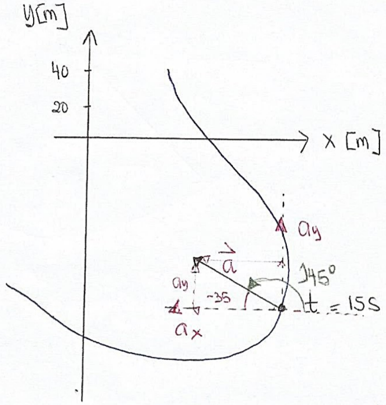
como $\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath}$ y $a_x = \frac{dV_x}{dt}$, $a_y = \frac{dV_y}{dt}$

$\Rightarrow a_x = \frac{d}{dt}(-0.62t + 7.2) = -0.62\,m/s^2$

$a_y = \frac{d}{dt}(0.44t - 9.1) = 0.44\,m/s^2$

Obs. La aceleración ya no depende del tiempo, por lo tanto, es constante

$$\vec{a} = (-0.62\hat{\imath} + 0.44\hat{\jmath})\,m/s^2$$
$$\|\vec{a}\| = 0.76\,m/s^2$$
$$\theta = -35^\circ + 180^\circ = 145^\circ$$



(5)

Caso especial de Mov. en 2D.

"Tiro Parabólico"

"Bases teóricas"

Considere una partícula que se mueve en un plano XY, con una velocidad inicial $\vec{v}_0$ y una aceleración constante de magnitud g y siempre en sentido $y^{(-)}$.

Primero: Si conocemos $\theta_0 \Rightarrow \vec{V}_0 = (V_0\cos\theta_0, V_0\,\mathrm{sen}\,\theta_0)$

luego $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$ como la partícula se mueve en el plano XY $\Rightarrow \vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$

es decir:

(1) $X = X_0 + V_{0x}t$ pues la $\vec{a} = -g\hat{\jmath}$ es decir $a_x = 0$, $a_y = -g$

↳ $X - X_0 = V_0\cos\theta_0\, t$

mientras que verticalmente sucede que:

$y = y_0 + V_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$

(2) $y - y_0 = (V_0\,\mathrm{sen}\,\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$

Obs: Se tienen dos movimientos con a cte en cada dimensión. Cada mov. es independiente del otro.

¿Cómo se encuentra la ecuación de la parábola? sug. despeje t de la ec. (1) y sust. en (2).

para obtener.

$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(V_0\cos\theta_0)^2}$$

Si consideramos $X_0 = 0$ y $y_0 = 0$ esta ecuación tiene la forma de $y = ax + bx^2$ que es la ec. general de una parábola.