Teorema de Varignon

Teorema de Varignon

(Principio de Momentos)

El momento de <u>una</u> fuerza con respecto a un punto de giro, es igual a la suma de los momentos de las componentes de la fuerza con respecto al punto de giro.

En 2D

$$M_{O_T} = (F_x\, d_x) + (F_y\, d_y)$$

donde $\vec{F} = (F_x, F_y)$

$d_x :=$ distancia perpendicular desde la línea de acción de F_x a O.

$d_y :=$ distancia perpendicular desde la línea de acción de F_y a O.

En 3D

$$M_{\theta T} = (\vec{r}_{\theta A} \times \vec{F}_x) + (\vec{r}_{\theta A} \times \vec{F}_y) + (\vec{r}_{\theta A} \times \vec{F}_z)$$

donde $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$

$\vec{r}_{\theta A}$:= distancia del punto de giro θ al punto A donde se aplica la fuerza F.

El principio de momentos también nos sirve para encontrar el momento total de un conjunto de fuerzas respecto a un punto de giro θ.

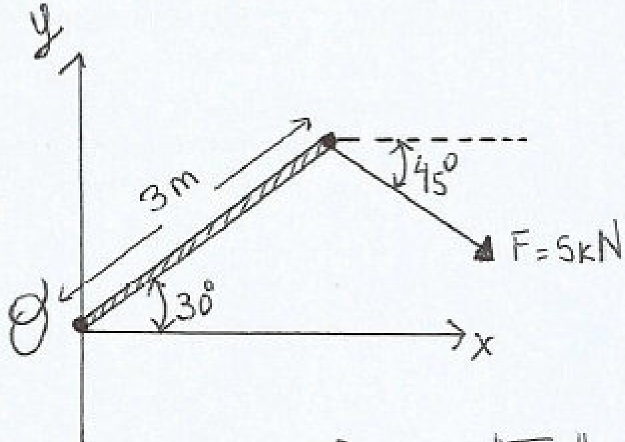
Sean $\vec{F}_1 = (F_{1x}, F_{1y}, F_{1z})$ $\quad \vec{F}_2 = (F_{2x}, F_{2y}, F_{2z})$

$$\Rightarrow \vec{M}_{\theta T} = (\vec{r}_{1\theta} \times \vec{F}_1) + (\vec{r}_{2\theta} \times \vec{F}_2)$$

donde $\vec{r}_{1\theta}$: vector desde θ hasta el punto donde se aplica F_1.

$\vec{r}_{2\theta}$: vector desde θ hasta el punto donde se aplica F_2.

Ej 1



Determine el momento de la fuerza $\vec{F}$ con respecto a O.
Use el teorema de Varignon.

$\Rightarrow \|F_x\| = F\cos 45^\circ$, $\|F_y\| = F \operatorname{sen} 45^\circ$ hacia abajo.

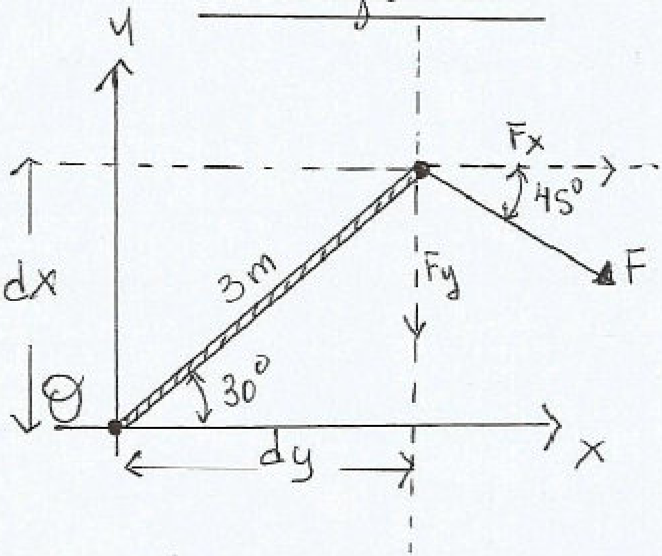
$= 5kN \cos 45^\circ$ $\qquad$ $= 5kN \operatorname{sen} 45^\circ$

$= 5kN \sqrt{2}/2$ $\qquad$ $= 5kN \sqrt{2}/2$.

luego vamos a calcular las dx y dy.

$dx = (3m)\operatorname{sen} 30^\circ$ $\qquad$ $dy = (3m)\cos 30^\circ$.

Diagrama

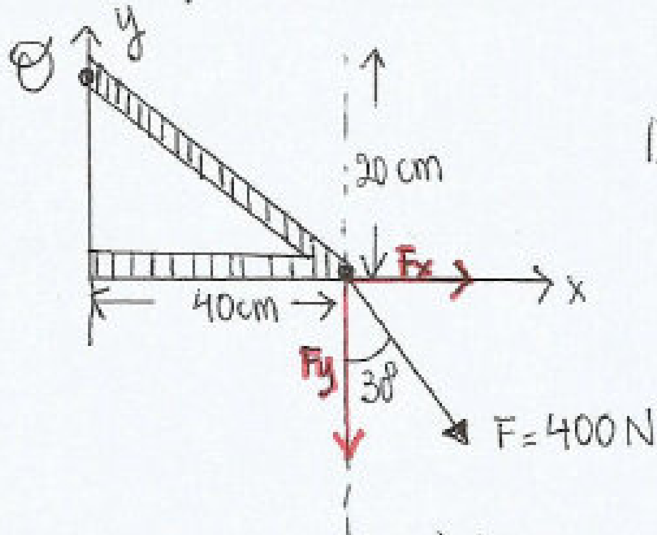


$$\Rightarrow M_{T_O} = \underbrace{(\|F_x\| d_x)}_{M_x} + \underbrace{(\|F_y\| d_y)}_{M_y}$$

ahora observo el sentido del giro de cada término. Aplico regla de la mano derecha 2D.

$$M_{T_O} = M_x \otimes + M_y \otimes = \boxed{-14.5\,kN \cdot m} = 14.5\,kN$$ horario

Ej 2 Determine el momento de la fuerza con respecto al punto O.



$r_y = d_y = 0.4\,m \quad r_x$ ó $d_x = 0.2\,m$

$\|F_x\| = F \operatorname{sen} 30^\circ$ y $\|F_y\| = F \cos 30^\circ$

$$\vec{M}_{OT} = \vec{M}_x + \vec{M}_y$$

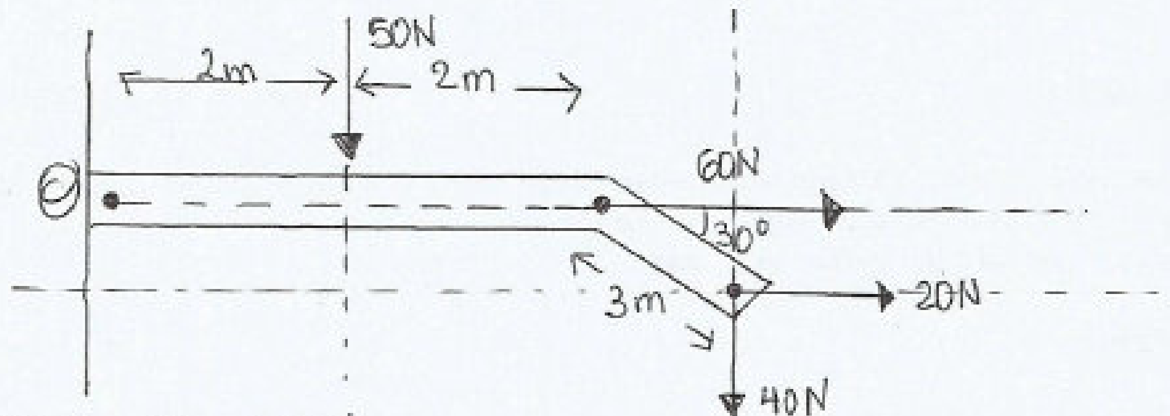
$$M_x = F_x d_x = (0.2\,m)(400\,N \operatorname{sen} 30^\circ) + \odot = 40\ N\cdot m$$

$$M_y = F_y d_y = (0.4\,m)(400\,N \cos 30^\circ) - \otimes = -138.56\ N\cdot m$$

$$\therefore \quad M_{OT} = +40\ N\cdot m - 138.56\ N\cdot m = -98.56\ N\cdot m$$

ó $\boxed{98.56\ N\cdot m \text{ horario}}$

(Ej 3) Determine el momento resultante de las 4 fuerzas que actúan sobre la barra respecto al punto O.



Sea $F_1 = 50N$, $F_2 = 60N$
$F_3 = 20N$ y $F_4 = 40N$

observo que la línea de acción de F_2 pasa por O $\therefore$ no genera momento.

Corolario: Si la línea de acción de $\vec{F}$ pasa por O, no genera momento respecto a O.

luego, $d_1 = 2m$, $d_3 = (3m)\,\text{sen}\,30°$ y $d_4 = 4m + (3m)\cos 30°$

ahora analicemos el sentido de los momentos generados por cada fuerza:

$M_1 = d_1 F_1 = (2m)(50N) = 100 N\cdot m$ horario

$M_3 = d_3 F_3 = (3m\,\text{sen}\,30^\circ)(20N) = 30 N\cdot m$ antihorario.

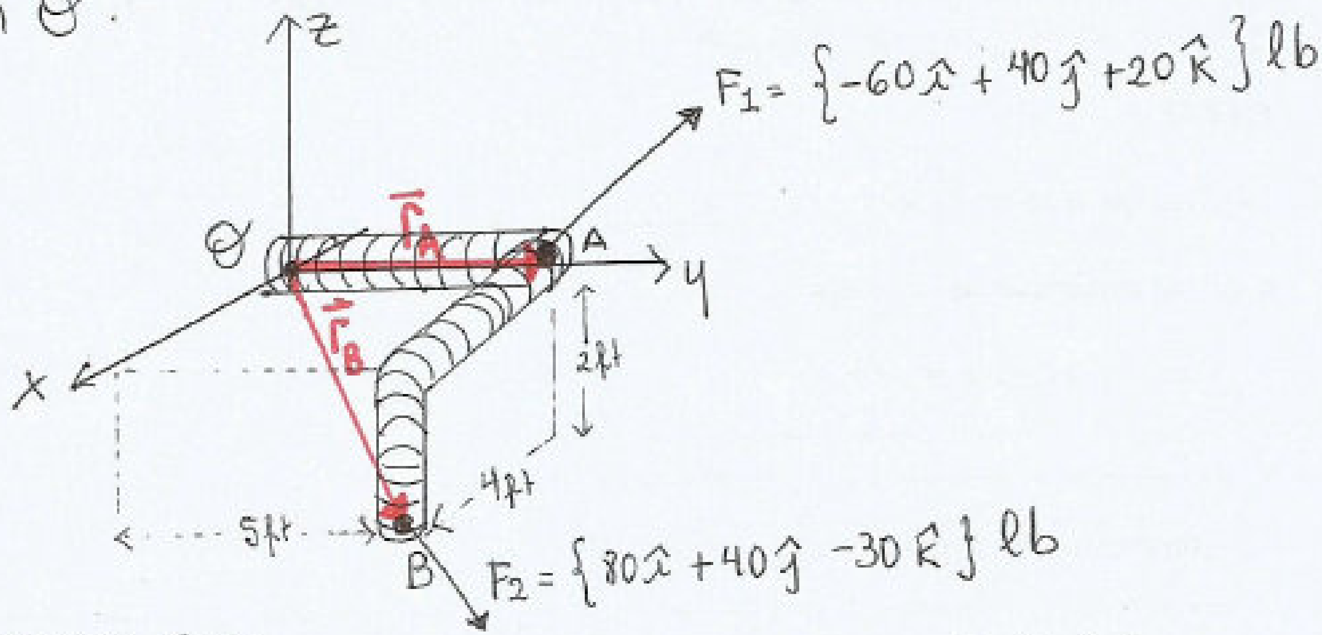
$M_4 = d_4 F_4 = (4m + (3m)\cos 30^\circ)(40N) = 263.92 N\cdot m$ horario

finalmente:

$$\vec{M}_{OT} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \vec{M}_4 = -100 Nm + 0 N\cdot m + 30 N\cdot m - 263{,}92 N\cdot m$$

$$\boxed{\vec{M}_{OT} = -333.92 N\cdot m}$$

Dos fuerzas actúan sobre la barra. Determine el momento resultante que generan con respecto al soporte en O.



Primero observamos que:

$O = (0,0,0)$ $A = (0,5,0)$ ft $B = (4,5,-2)$ ft

$\Rightarrow \vec{r}_{OA} = \vec{r}_A = (0,5,0)$ y $\vec{r}_{OB} = \vec{r}_B = (4,5,-2)$

$$\vec{M}_{O1} = \vec{r}_A \times F_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ -60 & 40 & 20 \end{vmatrix} = 100\hat{i} - 0\hat{j} + 300\hat{k}$$

$$\vec{M}_{O2} = \vec{r}_B \times F_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 5 & -2 \\ 80 & 40 & -30 \end{vmatrix} = -70\hat{i} - 40\hat{j} - 240\hat{k}$$

$$\therefore \vec{M}_{OT} = \vec{M}_{O1} + \vec{M}_{O2} = 30\hat{i} - 40\hat{j} + 60\hat{k}$$

$$\| M_{OT} \| = \sqrt{30^2 + (-40)^2 + (60)^2} = 78.10 \ N \cdot M$$

$$\therefore \cos\alpha_M = \frac{30}{78.10} \rightsquigarrow \alpha_M = 67.41^\circ$$

$$\cos\beta_M = \frac{-40}{78.10} \rightsquigarrow \beta_M = 120.8^\circ$$

$$\cos\gamma_M = \frac{60}{78.10} \rightsquigarrow \gamma_M = 39.80^\circ$$