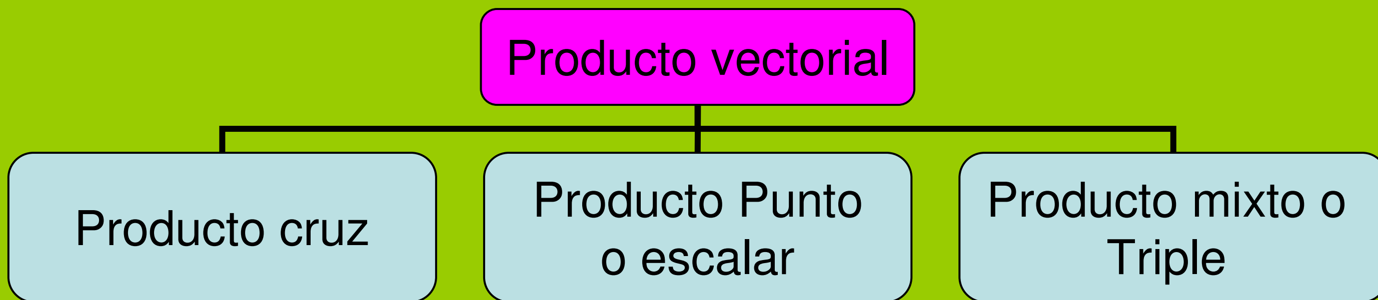
Producto vectorial

Objetivo: Conocer definiciones básicas y dominar la multiplicación de vectores.

Tipos de producto vectorial



Las definiciones que en seguida se muestran se tomaron de:
Geometría Analítica. Rodolfo Solís, Jesús Nolasco y Angel Victoria.
Facultad de Ingeniería de la UNAM. 1984.

Producto Cruz

- **Si A y B son vectores en el espacio, su producto cruz es un vector C, cuyas coordenadas se obtienen como:**

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)i + (a_3b_1 - a_1b_3)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$$

Propiedades del producto cruz de dos vectores:

Si λ es un escalar, y $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son dos vectores en el espacio de tres dimensiones, entonces se cumple que:

1) $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$ (Anticonmutatividad)

2) $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) + (\bar{a} \times \bar{c})$ (Ley distributiva izquierda)

También se cumple una ley distributiva derecha:

$(\bar{b} + \bar{c}) \times \bar{a} = (\bar{b} \times \bar{a}) + (\bar{c} \times \bar{a})$

3) $\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \times \bar{b}$

Producto cruz

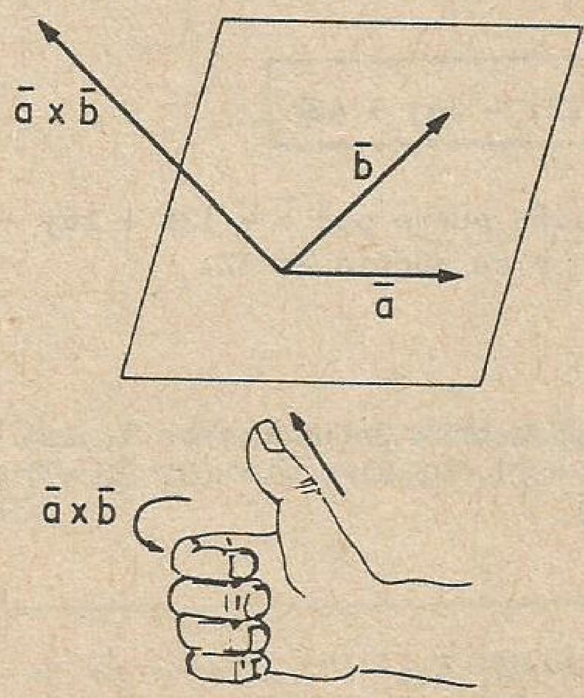
- El **módulo** del producto cruz de AxB es:

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}|\;|\bar{b}|\ \mathrm{sen}\ \theta \ ; \ 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

Estas expresiones representan el módulo del vector $\bar{a} \times \bar{b}$. En donde θ es el ángulo entre los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$. Cuando $\bar{a}$ o $\bar{b}$ son iguales a $\bar{0}$, el ángulo θ no tiene sentido, y en este caso el módulo de $\bar{a} \times \bar{b}$ es igual a cero.

Interpretación Geométrica del producto cruz

Cuando $\bar{a}$ es girado hacia $\bar{b}$ de tal manera que los dedos de la mano derecha giran en la dirección de la rotación, entonces el dedo pulgar indica la dirección del vector $\bar{a} \times \bar{b}$, figura I.32.



Interpretación geométrica del módulo del producto cruz

Por medio del producto vectorial, se puede calcular el área de un paralelogramo, a partir del siguiente razonamiento:

Considérese un paralelogramo que aloja en dos de sus lados concurrentes a los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$, tal como se demuestra en la figura I.34.

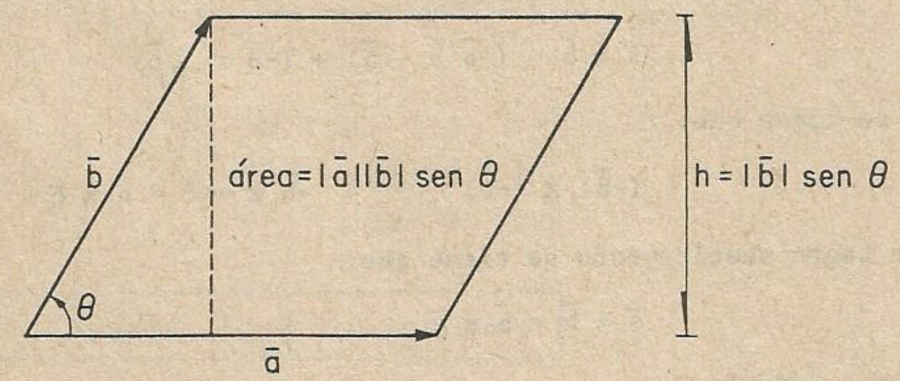


Figura I.34 Area de un paralelogramo

Se observa que la altura del paralelogramo está dada por $|\bar{b}|$ sen θ, en tanto que su base es igual a $|\bar{a}|$. El área del paralelogramo será entonces igual a $|\bar{a}|\ |\bar{b}|$ sen θ, que al relacionarla con la expresión $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}|\ |\bar{b}|$ sen θ, se deduce que el módulo del producto vectorial $\bar{a} \times \bar{b}$ es igual al área del paralelogramo en cuyos lados se alojan los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ es decir:

$$\text{Area del paralelogramo} = |\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}| \text{ sen } \theta$$

Producto escalar

El producto punto o escalar de dos vectores genera un número.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos\theta \quad ; \; 0° \leq \theta \leq 180°$$

Esto significa que el producto escalar de dos vectores diferentes del vector nulo, es igual al producto del módulo de $\bar{a}$, por el módulo de $\bar{b}$, por el coseno del ángulo entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$. Los módulos de $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son no negativos pero $\cos\theta$ puede ser positivo, negativo o cero. Por lo tanto el producto escalar $\bar{a} \cdot \bar{b}$ es negativo únicamente cuando $\cos\theta$ es negativo, es decir, únicamente cuando $90° < \theta \leq 180°$.

También se debe notar que cuando $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son *ortogonales* ($\theta = 90°$), se tiene que $\cos\theta = 0$ y por lo tanto $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$. Esto coincide con la proposición enunciada previamente acerca de la *ortogonalidad* de dos vectores.

Producto mixto

- El producto mixto otorga como resultado un escalar.

DEFINICION. Dados tres vectores cualesquiera $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$, se llama producto mixto de los tres vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$, al escalar $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$.

Nótese que al calcular el producto mixto, primero se debe efectuar el producto $\bar{b} \times \bar{c}$, ya que si se asocia $(\bar{a} \cdot \bar{b}) \times \bar{c}$ la expresión no tiene significado alguno, dado que $\bar{a} \cdot \bar{b}$ es un escalar y el producto vectorial está definido para dos vectores.

Interpretación del producto mixto

Considérense tres vectores cualesquiera $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, alojados en tres aristas concurrentes de un paralelepípedo, como se muestra en la figura I.35.

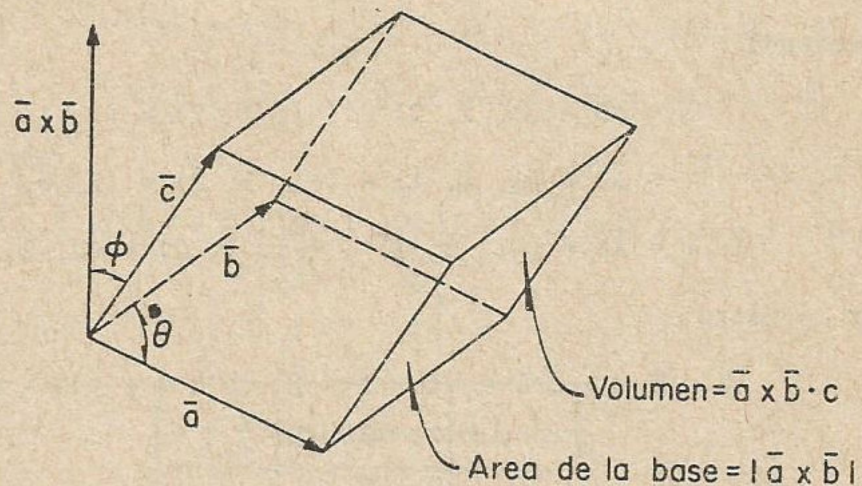


Figura I.35 Interpretación geométrica del producto mixto

Como ya se vio el área del paralelogramo en cuyos lados concurrentes se alojan los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ es igual a $|\bar{a} \times \bar{b}|$. Por otro lado la altura del paralelepípedo de la figura I.35 es: $|\bar{c}| \cos \phi$, donde ϕ es el ángulo entre $\bar{c}$ y $\bar{a} \times \bar{b}$.

Interpretación del producto mixto

En la figura $\cos\phi$ es positivo porque $0 \leq \phi < 90°$.

Entonces el volumen del paralelepípedo está dado por:

$$\text{Volumen} = \text{área de la base} \times \text{altura} = |\bar{a} \times \bar{b}|\ |\bar{c}| \cos\phi$$

Pero como se vio en el inciso I.3.1, que el producto escalar entre dos vectores, es igual al producto de sus módulos multiplicado por el coseno del ángulo que forman, se tiene que:

$$\boxed{\text{Volumen} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c} = [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]}$$

En otras palabras, el resultado del producto mixto $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$ es igual al volumen del paralelepípedo en tres de cuyas aristas concurrentes se alojan los vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Cuando el ángulo entre $\bar{a} \times \bar{b}$ y $\bar{c}$ denominado ϕ es tal que: $90° < \phi \leq 180°$, el producto $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$ es el negativo del volumen del paralelepípedo.

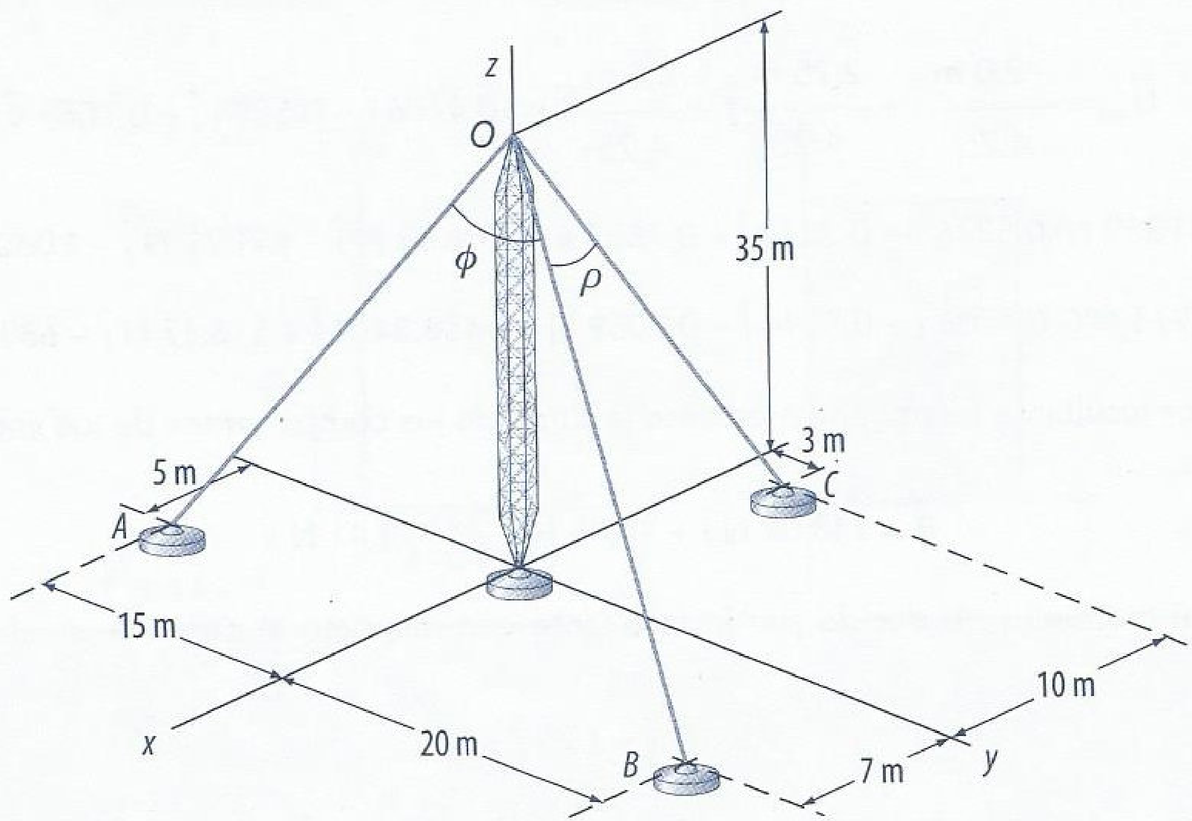
La interpretación geométrica anterior conduce a la conclusión de que la condición necesaria y suficiente para que tres vectores, llevados a un origen común, estén en un mismo plano es que su producto mixto sea igual a cero.

Ejemplos

Determinar los ángulos ϕ y ρ que se forman entre los cables:

a) OA y OB

b) OB y OC



Primero, se determinan los vectores:

$$\overrightarrow{OA} = 5 \text{ m } \hat{i} - 15 \text{ m } \hat{j} - 35 \text{ m } \hat{k}$$

$$\overrightarrow{OB} = 7 \text{ m } \hat{i} + 20 \text{ m } \hat{j} - 35 \text{ m } \hat{k}$$

$$\overrightarrow{OC} = -10 \text{ m } \hat{i} + 3 \text{ m } \hat{j} - 35 \text{ m } \hat{k}$$

Ahora, se utiliza el producto escalar para obtener el ángulo:

a) $\vec{R} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OB}| \cos \phi$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (5 \text{ m } \hat{i} - 15 \text{ m } \hat{j} - 35 \text{ m } \hat{k}) \cdot (7 \text{ m } \hat{i} + 20 \text{ m } \hat{j} - 35 \text{ m } \hat{k}) = 35 - 300 + 1\,225 = 960$$

$$|OA| = \sqrt{(5)^2 + (-15)^2 + (-35)^2} = 38.41$$

$$|OB| = \sqrt{(7)^2 + (20)^2 + (-35)^2} = 40.92$$

$$|OA|\,|OB| \cos \phi = |38.41|\,|40.92| \cos \phi$$

$$960 = 1\,571.74 \cos \phi$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{960}{1\,571.74}\right) = \cos^{-1} 0.6108 = 52.35°$$

$$\phi = 52.35°$$

b) $\vec{R} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OB}|\,|\overrightarrow{OC}| \cos \rho$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = (7\text{ m}\,\hat{i} + 20\text{ m}\,\hat{j} - 35\text{ m}\,\hat{k}) \cdot (-10\text{ m}\,\hat{i} + 3\text{ m}\,\hat{j} - 35\text{ m}\,\hat{k}) =$$

$$= -70 - 60 + 1\,225 = 1\,095$$

$$|OB| = \sqrt{(7)^2 + (20)^2 + (-35)^2} = 40.92\text{ m}$$

$$|OC| = \sqrt{(-10)^2 + (3)^2 + (-35)^2} = 36.52\text{ m}$$

$$|OA|\,|OB| \cos \phi = |40.92|\,|36.52|\,\rho$$

$$1\,095 = 1\,494.40 \cos \rho$$

$$\rho = \cos^{-1}\left(\frac{1\,095}{1\,494.40}\right) = \cos^{-1} 0.7327 = 42.88°$$

$$\rho = 42.88°$$

Ejemplo 2

Determinar el volumen del paralelepípedo con aristas que coinciden con los vectores:

$$\vec{A} = 5\ \text{m}\ \hat{i} + 3\ \text{m}\ \hat{j} + 0\ \text{m}\ \hat{k}$$

$$\vec{B} = -6\ \text{m}\ \hat{i} + 4\ \text{m}\ \hat{j} + 0\ \text{m}\ \hat{k}$$

$$\vec{C} = 0\ \text{m}\ \hat{i} + 0\ \text{m}\ \hat{j} + 7\ \text{m}\ \hat{k}$$

Solución

Primero, se calcula el producto vectorial entre el vector $\vec{A}$ y el vector $\vec{B}$, para obtener el área del paralelogramo:

$$\text{Área} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 3 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} \hat{k} =$$

$$\text{Área} = 0\ \text{m}^2\ \hat{i} + 0\ \text{m}^2\ \hat{j} + (20 + 18)\ \text{m}^2\ \hat{k} = 38\ \text{m}^2\ \hat{k}$$