Momento Respecto a un eje

Momento de una Fuerza respecto a un eje

El momento de una fuerza $\vec{F}$ aplicada en A con respecto a un eje que no pasa a través del origen se obtiene como:

a) Seleccionar un punto arbitrario B sobre el eje

b) determinar la proyección del momento de F sobre el eje y respecto de B.

$$\boxed{M_{BL} = \underbrace{\vec{\lambda}}_{\text{Vector unitario sobre el eje}} \bullet \vec{M}_B}$$

$\vec{M}_B$ ← Momento de F respecto de B (punto de giro).

EQUIVALE

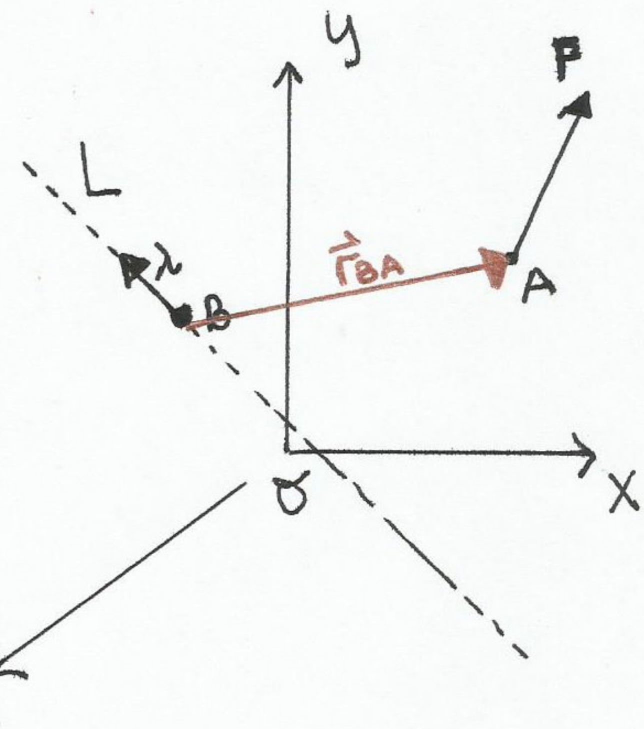
$$M_{BL} = \vec{\lambda} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$$

Se puede obtener también como:

TAMBIÉN

$$M_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ r_{BA_x} & r_{BA_y} & r_{BA_z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

donde $\vec{r}$ va desde el punto B que esta en el eje L hacia el punto A donde se aplica la fuerza $\vec{F}$.

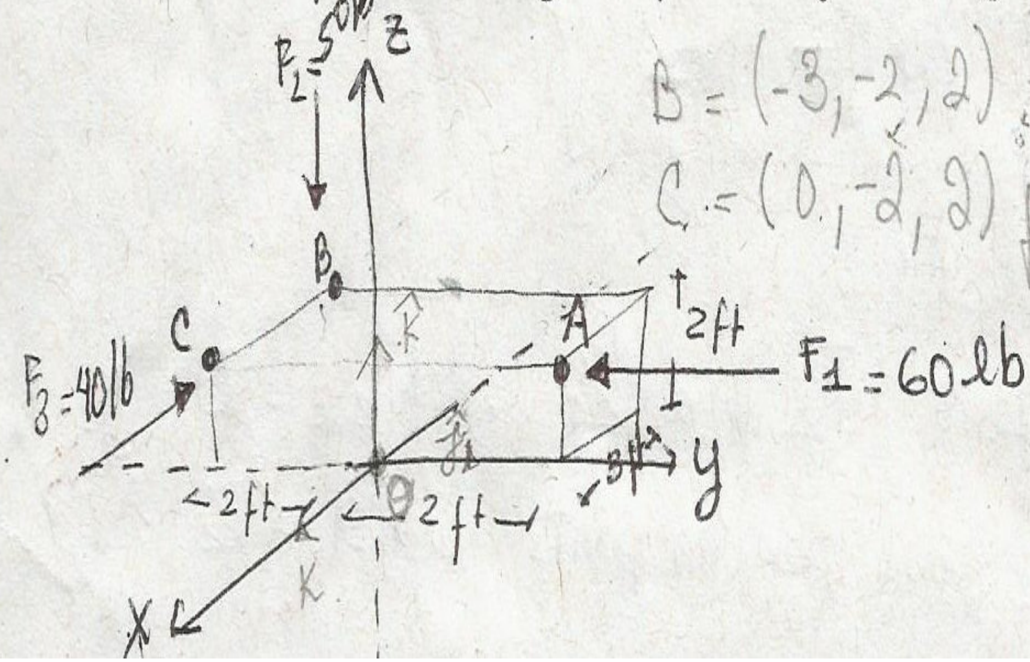


Ejemplo

Ejemplo 1 Determine el momento resultante de las 3 fuerzas siguientes, respecto al eje x, al eje y y al eje z.

$B = (-3, -2, 2)$ ft $\quad A(0, 2, 2)$ ft

$C = (0, -2, 2)$ ft



Solución usando el metodo 2

Met. 2 — Usando $M_{eje} = \lambda_{eje} \cdot \sum M_{\text{punto en el eje}}$

$M_{Rx} = \lambda_x \cdot \sum M_{\text{punto en el eje}}$, $\lambda_x = (1, 0, 0)$

$O = (0,0,0)\ ft$ — $F_1 = (0,-60,0)\ lb$, $F_2 = (0, 0, -50)\ lb$.

$A = (0,2,2)\ ft$ — $F_3 = (-40, 0, 0)\ lb$

$B = (-3,-2,1)\ ft$ — $\vec{r}_{OA} = (0,2,2)ft - (0,0,0) = (0,2,2)\ ft$

$C = (0,-2,2)\ ft$.

Momentos de cada fuerza respecto al punto O.

$$M_{1O} = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}_1 = (0,2,2)\,ft \times (0,-60,0) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -60 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(120) - \hat{j}(0) + \hat{k}(0) = 120\ lb\ \hat{i}$$

$$\boxed{M_{1O} = 120\ lb\ \hat{i}}$$

$$M_{2O} = \vec{r}_{OB} \times \vec{F}_2 = (-3,-2,1)\,ft \times (0,0,-50)\,lb = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -50 \end{vmatrix} = \hat{i}(100) - \hat{j}(150) + \hat{k}(0)$$

$$\boxed{M_{2O} = 100\hat{i} - 150\hat{j}}$$

$M_{3\theta} = \vec{r}_C \times \vec{F}_3 = (0,-2,+2)\,ft \times (-40,0,0)\,lb = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -2 & +2 \\ -40 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(0) - \hat{j}(80) + \hat{k}(-80)$

$\boxed{M_{3\theta} = -80\hat{j} - 80\hat{k}}$

Luego para el momento resultante en cada eje.

$M_{Rx} = \vec{\lambda}_x \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} \vec{M}_{i\theta}\right)$, $M_{Ry} = \vec{\lambda}_y \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} \vec{M}_{i\theta}\right)$, $M_{Rz} = \vec{\lambda}_z \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} \vec{M}_{i\theta}\right)$

$\Rightarrow M_{Rx} = (1,0,0) \cdot (\vec{M}_{1\theta} + \vec{M}_{2\theta} + \vec{M}_{3\theta}) = (1,0,0) \cdot (220,-230,-80)\,lb \cdot ft$

$\boxed{M_{Rx} = 220\ lb\,ft}$

$\Rightarrow M_{Ry} = (0,1,0) \cdot (220,-230,-80)\,lb \cdot ft = \boxed{-230\ lb\,ft}$

$M_{Rz} = (0,0,1) \cdot (220,-230,-80)\,lb \cdot ft = \boxed{-80\ lb\,ft}$

Solución usando Mét.3

Met. 3 Usando el triple producto mixto..

$$M_{eje} = \lambda_{eje} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

punto en el eje al de aplicación de la fuerza

$$M_{1x} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_{OAx} & r_{OAy} & r_{OAz} \\ F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -60 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -60 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 - (-120) = 120\ lb \cdot ft$$

$$M_{2x} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_{OBx} & r_{OBy} & r_{OBz} \\ F_{2x} & F_{2y} & F_{2z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -50 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -50 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 100 - (0) = 100\ lb \cdot ft$$

$M_{3x} = 0$ pues F_3 es $\parallel$ a X

$$\therefore\ M_{Rx} = M_{1x} + M_{2x} = 120\ lb \cdot ft + 100\ lb \cdot ft = \boxed{220\ lb \cdot ft}.$$

$M_{1y} = 0$ Pues F_1 es $\parallel Y$ luego

$$M_{2y} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ r_{OB} & r_{OB} & r_{OB} \\ F_{2x} & F_{2y} & F_{2z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -50 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 - (+150) = -150\ lb.$$

$$M_{3y} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ r_{OC} & r_{OC} & r_{OC} \\ F_{3x} & F_{3y} & F_{3z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ -40 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -40 - 0 = -80\ lb.$$

$$\boxed{M_{Ry} = -230\ lb \cdot ft}$$

$M_{2z} = 0$ pues F_2 es $\parallel Z$, $M_{1z} = 0$ pues la línea de acción de F_1 intersecta a Z.

$$\Rightarrow M_{3z} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ r_{OCx} & r_{OCy} & r_{OCz} \\ F_{3x} & F_{3y} & F_{3z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (0) - (80) = \boxed{-80\ lb \cdot ft}$$

$$\Rightarrow M_{Rz} = \boxed{-80\ lb \cdot ft}$$

Conclusiones

- El momento de una fuerza respecto a un eje se reporta como un escalar, pues su dirección es la misma que la del eje.
- Una fuerza paralela a un eje no genera momento respecto a ese eje.