EJEMPLOS DE EJERCICIOS MRUA CON INTEGRALES

Problema modelo 2-3

La posición de una partícula que se mueve en un eje x está dada por:

$$x = 7.8 + 9.2t - 2.1t^3. \quad (2\text{-}5)$$

Con x en metros y t en segundos. ¿Cuál es la velocidad en t = 3.5s? ¿La velocidad es constante o cambia continuamente?

SOLUCIÓN: Para simplificar, las unidades se han omitido de la ecuación 2-5, pero es posible insertarlas si se desea al cambiar los coeficientes a 7.8 m, 9.2 m/s y –2.1 m/s^3. La **idea básica** aquí es que la velocidad es la primera derivada (con respecto al tiempo) de la función de posición $x(t)$. Por tanto, escribimos

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(7.8 + 9.2t - 2.1t^3),$$

que se convierte en

$$v = 0 + 9.2 - (3)(2.1)t^2 = 9.2 - 6.3t^2. \quad (2\text{-}6)$$

En t = 3.5 s,

$$v = 9.2 - (6.3)(3.5)^2 = -68 \text{ m/s}. \quad \text{(Respuesta)}$$

En t = 3.5 s, la partícula se mueve en la dirección negativa de x (nótese el signo menos) con una velocidad de 68 m/s. Como la cantidad t aparece en la ecuación 2-6, la velocidad v depende de t y, por tanto cambia continuamente.

✔**PREGUNTA DE REPASO 3:** Las siguientes ecuaciones dan la posición $x(t)$ de una partícula en cuatro situaciones (en cada ecuación, x está en metros, t en segundos, y $t > 0$): 1) $x = 3t - 2$; 2) $x = -4t^2 - 2$; 3) $x = 2/t^2$; y 4) $x = -2$. a) ¿En qué situación es constante la velocidad v de la partícula? b) ¿En cuál está v en la dirección x negativa?

Problema modelo 2-4

La posición de una partícula sobre el eje x de la figura 2-1 está dada por

$$x = 4 - 27t + t^3,$$

con x medida en metros y t en segundos.

a) Encuentre la función de velocidad $v(t)$ y la función de aceleración $a(t)$.

SOLUCIÓN: Una **idea básica** es que para obtener la función de velocidad $v(t)$, derivamos la función de posición $x(t)$ con respecto al tiempo. Aquí encontramos

$$v = -27 + 3t^2, \quad \text{(Respuesta)}$$

con v medida en metros por segundo.

Otra **idea básica** es que para obtener la función de aceleración $a(t)$, derivamos la función de velocidad $v(t)$ con respecto al tiempo. Esto nos da

$$a = +6t, \quad \text{(Respuesta)}$$

con a medida en metros por segundo al cuadrado.

b) ¿Hay un tiempo donde $v = 0$?

SOLUCIÓN: Al hacer $v(t) = 0$ resulta

$$0 = -27 + 3t^2,$$

que tiene la solución

$$t = \pm 3 \text{ s}. \quad \text{(Respuesta)}$$

Por tanto, la velocidad es cero 3 s antes y 3 s después que el reloj marque 0.

c) Describa el movimiento de la partícula para $t \geq 0$.

SOLUCIÓN: La **idea básica** es examinar las expresiones para $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$.

En $t = 0$, la partícula está en $x(0) = +4$ m y se mueve con una velocidad de $v(0) = -27$ m/s, es decir, en la dirección negativa del eje x. Su aceleración es $a(0) = 0$, porque en ese momento la velocidad de la partícula no está cambiando.

Para $0 < t < 3$ s, la partícula todavía tiene una velocidad negativa, de manera que continúa moviéndose en la dirección negativa. Sin embargo, su aceleración ya no es 0 sino creciente y positiva. Como los signos de la velocidad y la aceleración son opuestos, la partícula debe estar desacelerando.

Ejemplo 3

Un tren futurista denominado AVM (por sus siglas: Alta Velocidad Mexicana) es un proyecto propuesto por jóvenes universitarios, cuyo objetivo es que este logre una rapidez de 520 $\frac{km}{h}$. Se tiene calculado que este incremente su rapidez a partir de los 245 $\frac{km}{h}$, según la siguiente relación:

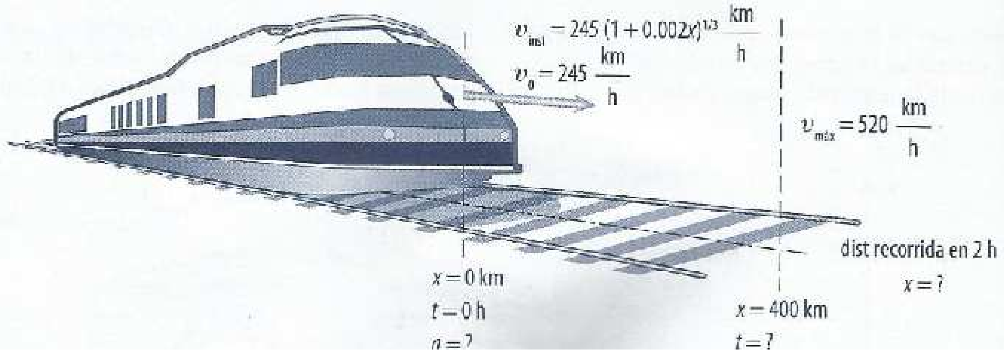
$$v_x = 245(1 + 0.002x)^{\frac{1}{3}}\ \frac{km}{h}$$

Considérese que $x = 0$ km y $t = 0$ h en el momento que el tren tiene una rapidez de 245 $\frac{km}{h}$. Como la vía es recta, se debe contemplar el terreno plano.

a) Calcular cuántos metros recorre el tren a partir de $t = 0$ h y $x = 0$ m en un tiempo de 2 h.

b) Determinar qué aceleración tiene el tren cuando $t = 0$ s.

c) Calcular en cuántos minutos recorre los primeros 400 km a partir de $t = 0$ h y $x = 0$ m.



Ya que la vía es recta y el terreno plano, se debe considerar que el tren se mueve a lo largo del eje x en sentido positivo; por tanto, la velocidad del tren se considerará en dirección del eje x:

$$v_x = 245(1 + 0.002x)^{\frac{1}{3}}\ \frac{km}{h}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$dt = \frac{dx}{v_x}$$

De esta forma, es posible obtener una relación que dé el tiempo en función de la distancia recorrida a partir de $x = 0$ m:

$$\int_0^t dt = \int_0^x \frac{1}{v_x} dx$$

$$t = \frac{1}{245}\int_0^x (1 + 0.002x)^{-\frac{1}{3}} dx$$

$$t = \frac{1}{245}\left(\frac{1}{0.002}\right)\int_0^x 0.002(1 + 0.002x)^{-\frac{1}{3}} dx$$

$$t=\frac{1}{245}\left(\frac{1}{0.002}\right)\left[\frac{(1+0.002x)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_0^x$$

$$t=\frac{1}{245}\left(\frac{1}{0.002}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left[(1+0.002x)^{\frac{2}{3}}\right]_0^x$$

$$t=3.06122\left[(1+0.002x)^{\frac{2}{3}}-(1+0.002(0))^{\frac{2}{3}}\right]$$

$$t=3.06122\left[(1+0.002x)^{\frac{2}{3}}-1\right]$$

Despejando x tenemos:

$$\frac{t}{3.06122}=\left[(1+0.002x)^{\frac{2}{3}}-1\right]$$

$$\left[\frac{t}{3.06122}+1\right]^{\frac{3}{2}}=1+0.002x$$

$$\frac{\left[\frac{t}{3.06122}+1\right]^{\frac{3}{2}}-1}{0.002}=x$$

Si transcurren 2 h a partir de $t = 0$ h, al sustituir tenemos:

$$x = \frac{\left[\dfrac{2\text{ h}}{3.06122} + 1\right]^{\frac{3}{2}} - 1}{0.002}$$

$$x = \frac{2.125 - 1}{0.002}$$

$$x = 562.94 \text{ km}$$

$$x = 562\,940 \text{ m}$$

b)

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

Donde:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}245(1 + 0.002x)^{\frac{1}{3}}$$

Y

$$dt = \frac{dx}{v_x}$$

$$dt = \frac{dx}{245(1 + 0.002x)^{\frac{1}{3}}}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{\left(\dfrac{dx}{v_x}\right)}$$

$$a_x = v_x \frac{dv_x}{dx}$$

Entonces, la rapidez cuando $t = 0$ h es:

$$v_{x0} = 245\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$a_{x0} = v_{x0}\frac{dv_x}{dx}$$

Donde:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}\left(245(1 + 0.002x)^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$\frac{dv}{dx} = 245\frac{1}{3}(1 + 0.002x)^{-\frac{2}{3}}(0.002)$$

$$\frac{dv}{dx} - 0.1633(1 - 0.002x)^{-\frac{2}{3}}$$

$$a_{x0} = v_{x0}\left(0.1633(1 + 0.002x)^{-\frac{2}{3}}\right)$$

$$x = 0 \text{ km.}$$

Sustituyendo:

$$a_{x0} = 245(0.163)(1)^{-\frac{2}{3}}$$

$$a_{x0} = 245(0.163)\,\frac{\text{km}}{\text{h}^2}$$

$$a_{x0} = 39.935\,\frac{\text{km}}{\text{h}^2}$$

Haciendo la conversión a $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$:

$$a_{x0} = \left(39.935\,\frac{\text{km}}{\text{h}^2}\right)\left(\frac{1\,000\text{ m}}{\text{km}}\right)\left(\frac{\text{h}^2}{(60\text{ min})^2}\right)\left(\frac{\text{min}^2}{(60\text{ s})^2}\right)$$

$$a_{x0} = 0.0030810185\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Por tanto, la aceleración cuando $t = 0$ h es:

$$a_{x0}\hat{\boldsymbol{i}} = 0.0030810185\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\hat{\boldsymbol{i}}$$

d)

$$t = 3.06122\left[(1 + 0.002x)^{\frac{2}{3}} - 1\right]$$

Sustituyendo x por 400 km:

$$t = 3.06122\left[(1 + 0.002(400))^{\frac{2}{3}} - 1\right]$$

$$t = 3.06122(1.47966 - 1)$$

$$t = 1.46837\ \text{h}$$

Transformando 1.46837 h en minutos:

$$t = (1.46837\ \text{h})\left(60\frac{\text{min}}{\text{h}}\right) = 88.1\ \text{min}$$

Entonces, el AVM recorre los primeros 400 km en un tiempo de 88.1 min.

$$t = 88.1\ \text{min}$$