SISTEMA DE FUERZAS EQUIVALENTES O EQUIPOLENTES

Tema 3.7 del programa de la asignatura.
Sección 4.7 del Hibbeler y 3.18 del Beer

OBJETIVO: Aprender a reducir y simplificar el conjunto de fuerzas y momentos que actúan sobre un cuerpo.

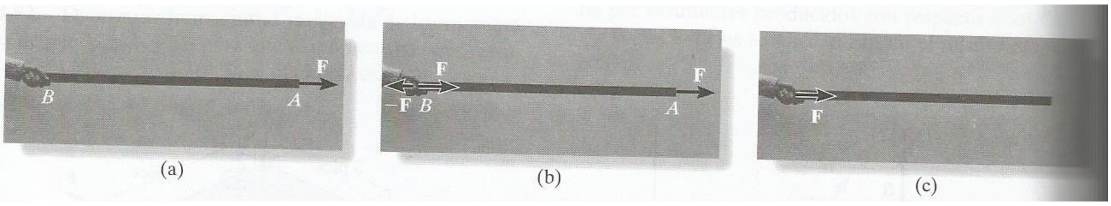
DEFINICIÓN: Un sistema de fuerzas equivalentes es aquel que produce los mismos *efectos externos* sobre el cuerpo. Consta de una fuerza resultante (aplicada en un punto específico o de interés) y un momento resultante.

Los *efectos externos* que un sistema de fuerzas genera sobre un cuerpo puede ser de dos tipos:

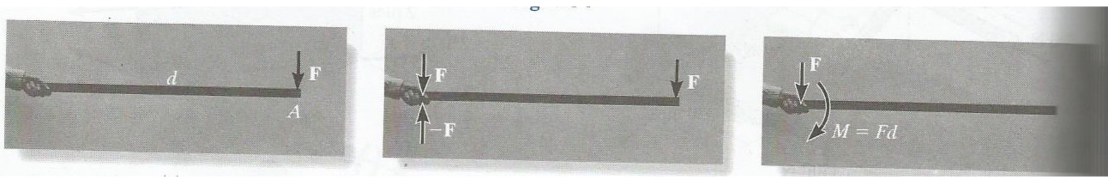
Si el cuerpo es libre de moverse ⇒Los efectos consisten en su translación y rotación

Si el cuerpo esta fijo⇒Los efectos consisten en las fuerzas reactivas en los apoyos o soportes.

Observaciones importantes



En esta figura la barra se sujeta en B. Como B esta en la línea de acción de F no hay torca o momento generado por F.



En esta situación la línea de acción de F no pasa por el punto de apoyo por lo que genera una torca o momento.

Nota: Si el punto de interés O no pasa por la línea de acción de la fuerza resultante, se tiene que añadir una torca para que el sistema sea equivalente.

Para simplificar un sistema de fuerzas y momentos a una fuerza resultante FR que actúe en el punto O y, un momento resultante MR_o se aplican las sig ecuaciones:

1) FR= ΣF es decir, la fuerza resultante es igual a la suma de las fuerzas externas actuantes

2) MRo= $\Sigma Mo+\Sigma M$ donde Mo es el momento de cada una de las fuerzas respecto de O y, M es cualquier otro momento que actúa sobre el cuerpo.

MÉTODO PARA RESOLVER EJERCICIOS

I

Se sugiere establecer el orígen del sistema de coordenadas en el punto O.

II

Si el problema está en el plano (2D)

⇓

⇒ Descomponer cada fuerza en sus componentes *x* y *y,* para encontrar las componentes de las fuerzas resultantes.

⇒Usar el principio de momentos o de Varignon para determinar el momento resultante. Es decir, se debe calcular el momento de cada componente y luego sumar.

III

Si el problema esta en el espacio (3D)

⇓

⇒ Expresar cada fuerza como un vector cartesiano y hacer la suma de vectores para hallar la fuerza resultante.

⇒Usar la definición vectorial del momento (M=r x F) y calcular con ella el momento de cada fuerza respecto al punto O y luego sumar todos los momentos.

EJEMPLOS

EJEMPLO 4.14

Reemplace el sistema de fuerza y par que se muestra en la figura 4-37a por una fuerza resultante equivalente y un momento de par que actúen en el punto O.

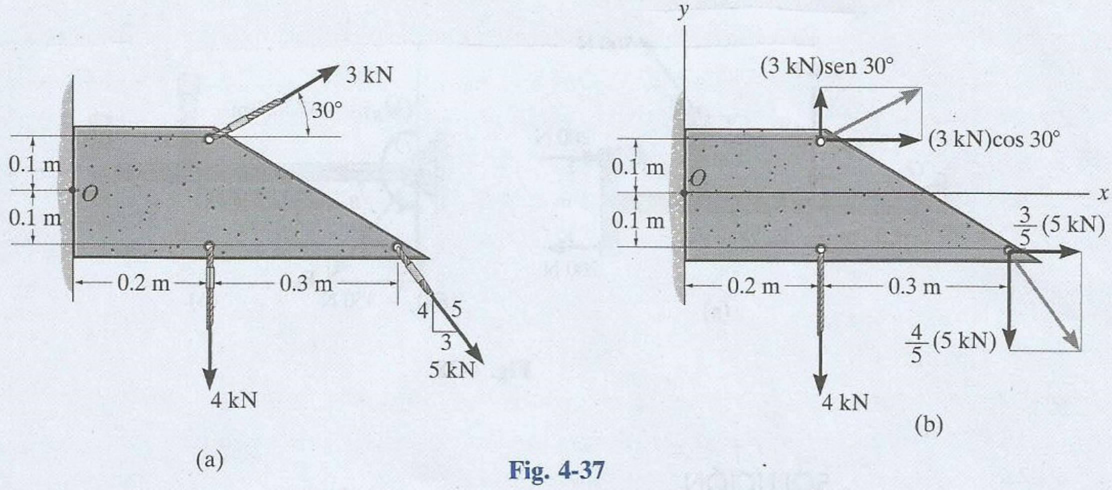


Fig. 4-37

SOLUCIÓN

Suma de fuerzas. Las fuerzas de 3 kN y 5 kN se descomponen en sus componentes x y y como se muestra en la figura 4-37b. Tenemos

$$\overset{+}{\rightarrow}(F_R)_x = \Sigma F_x; \quad (F_R)_x = (3\text{ kN})\cos 30° + \left(\tfrac{3}{5}\right)(5\text{ kN}) = 5.598\text{ kN}\rightarrow$$

$$+\uparrow(F_R)_y = \Sigma F_y; \quad (F_R)_y = (3\text{ kN})\text{sen } 30° - \left(\tfrac{4}{5}\right)(5\text{ kN}) - 4\text{ kN} = -6.50\text{ kN} = 6.50\text{ kN}\downarrow$$

Con base en el teorema de Pitágoras, figura 4-37c, la magnitud de $\mathbf{F}_R$ es

$$F_R = \sqrt{(F_R)_x{}^2 + (F_R)_y{}^2} = \sqrt{(5.598\text{ kN})^2 + (6.50\text{ kN})^2} = 8.58\text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Su dirección θ es

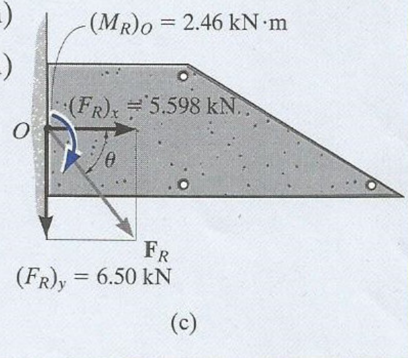
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{(F_R)_y}{(F_R)_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{6.50\text{ kN}}{5.598\text{ kN}}\right) = 49.3° \qquad \textit{Resp.}$$

Suma de momentos. Los momentos de 3 kN y 5 kN con respecto al punto O se determinarán mediante el uso de sus componentes x y y. Con referencia a la figura 4-37b, tenemos

$$\circlearrowleft + (M_R)_O = \Sigma M_O;$$

$$(M_R)_O = (3\text{ kN})\text{sen } 30°(0.2\text{ m}) - (3\text{ kN})\cos 30°(0.1\text{ m}) + \left(\tfrac{3}{5}\right)(5\text{ kN})(0.1\text{ m})$$
$$- \left(\tfrac{4}{5}\right)(5\text{ kN})(0.5\text{ m}) - (4\text{ kN})(0.2\text{ m})$$
$$= -2.46\text{ kN}\cdot\text{m} = 2.46\text{ kN}\cdot\text{m} \circlearrowright \qquad \textit{Resp.}$$

Este momento en el sentido de las manecillas del reloj se muestra en la figura 4-37c.



(c)

NOTA: observe que la fuerza y el momento de par resultantes en la figura 4.37c producirán los mismos efectos externos o reacciones en los apoyos que los producidos por el sistema de fuerzas, figura 4-37a.

EJEMPLO 4.15

Reemplace el sistema de fuerza y par que actúa sobre el elemento de la figura 4-38a por una fuerza y un momento de par equivalentes que actúen en el punto O.

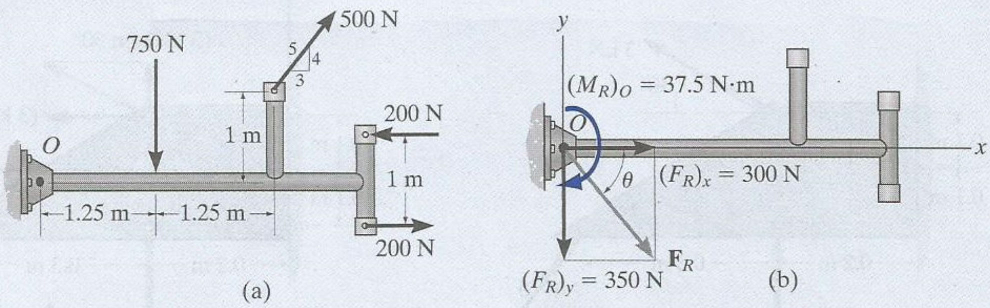


Fig. 4-38

SOLUCIÓN

Suma de fuerzas. Como las fuerzas del par son de 200 N e iguales pero opuestas, producen una fuerza resultante nula, por lo tanto no es necesario considerarlas en la sumatoria de fuerzas. La fuerza de 500 N se descompone en sus componentes x y y, por tanto,

$$\overset{+}{\rightarrow} (F_R)_x = \Sigma F_x; \quad (F_R)_x = \left(\tfrac{3}{5}\right)(500 \text{ N}) = 300 \text{ N} \rightarrow$$

$$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y; \quad (F_R)_y = (500 \text{ N})\left(\tfrac{4}{5}\right) - 750 \text{ N} = -350 \text{ N} = 350 \text{ N}\downarrow$$

A partir de la figura 4-15b, la magnitud de $\mathbf{F}_R$ es

$$F_R = \sqrt{(F_R)_x^{\,2} + (F_R)_y^{\,2}}$$

$$= \sqrt{(300 \text{ N})^2 + (350 \text{ N})^2} = 461 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

Y el ángulo θ es

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{(F_R)_y}{(F_R)_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{350 \text{ N}}{300 \text{ N}}\right) = 49.4^\circ \qquad \textit{Resp.}$$

Suma de momentos. Como el momento de par es un vector libre, puede actuar en cualquier punto del elemento. Con referencia a la figura 4-38a, tenemos

$$\circlearrowleft + (M_R)_O = \Sigma M_O + \Sigma M_c;$$

$$(M_R)_O = (500 \text{ N})\left(\tfrac{4}{5}\right)(2.5 \text{ m}) - (500 \text{ N})\left(\tfrac{3}{5}\right)(1 \text{ m})$$

$$- (750 \text{ N})(1.25 \text{ m}) + 200 \text{ N·m}$$

$$= -37.5 \text{ N·m} = 37.5 \text{ N·m} \circlearrowright \qquad \textit{Resp.}$$

Este momento en el sentido de las manecillas del reloj se muestra en la figura 4-38b.

EJEMPLO 4.16

El elemento estructural está sometido al momento de un par **M** y a las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ como se muestra en la figura 4-39*a*. Reemplace este sistema por una fuerza resultante equivalente y el momento de un par que actúen en su base, es decir el punto *O*.

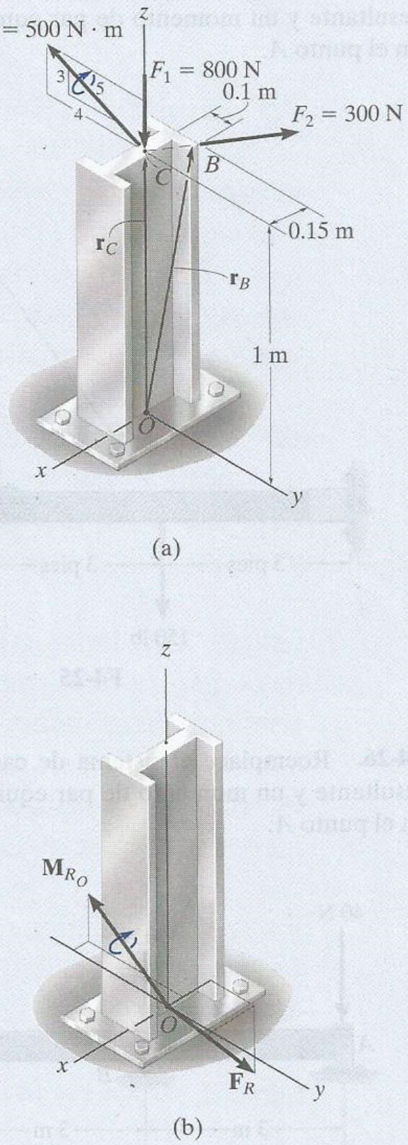


Fig. 4-39

SOLUCIÓN *(ANÁLISIS VECTORIAL)*

Los aspectos tridimensionales del problema pueden simplificarse mediante un análisis vectorial cartesiano. Al expresar las fuerzas y el momento de par como vectores cartesianos tenemos

$$\mathbf{F}_1 = \{-800\mathbf{k}\}\text{ N}$$

$$\mathbf{F}_2 = (300\text{ N})\mathbf{u}_{CB}$$

$$= (300\text{ N})\left(\frac{\mathbf{r}_{CB}}{r_{CB}}\right)$$

$$= 300\text{ N}\left[\frac{\{-0.15\mathbf{i} + 0.1\mathbf{j}\}\text{ m}}{\sqrt{(-0.15\text{ m})^2 + (0.1\text{ m})^2}}\right] = \{-249.6\mathbf{i} + 166.4\mathbf{j}\}\text{ N}$$

$$\mathbf{M} = -500\left(\tfrac{4}{5}\right)\mathbf{j} + 500\left(\tfrac{3}{5}\right)\mathbf{k} = \{-400\mathbf{j} + 300\mathbf{k}\}\text{ N}\cdot\text{m}$$

Suma de fuerzas.

$$\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F}; \qquad \mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -800\mathbf{k} - 249.6\mathbf{i} + 166.4\mathbf{j}$$

$$= \{-250\mathbf{i} + 166\mathbf{j} - 800\mathbf{k}\}\text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

Suma de momentos.

$$\mathbf{M}_{R_O} = \Sigma\mathbf{M} + \Sigma\mathbf{M}_O$$

$$\mathbf{M}_{R_O} = \mathbf{M} + \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_2$$

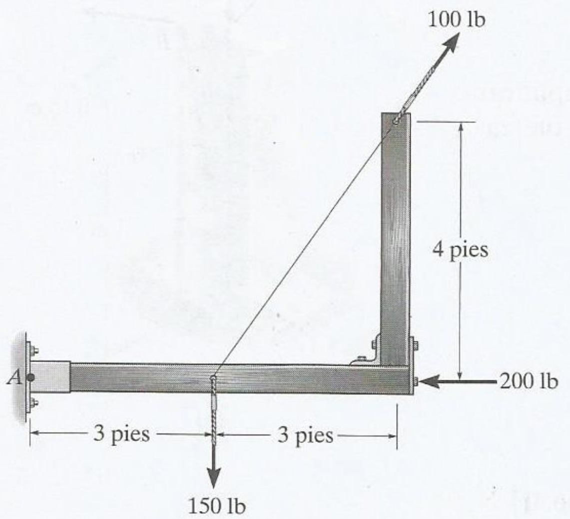
$$\mathbf{M}_{R_O} = (-400\mathbf{j} + 300\mathbf{k}) + (1\mathbf{k}) \times (-800\mathbf{k}) + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -0.15 & 0.1 & 1 \\ -249.6 & 166.4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-400\mathbf{j} + 300\mathbf{k}) + (\mathbf{0}) + (-166.4\mathbf{i} - 249.6\mathbf{j})$$

$$= \{-166\mathbf{i} - 650\mathbf{j} + 300\mathbf{k}\}\text{ N}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

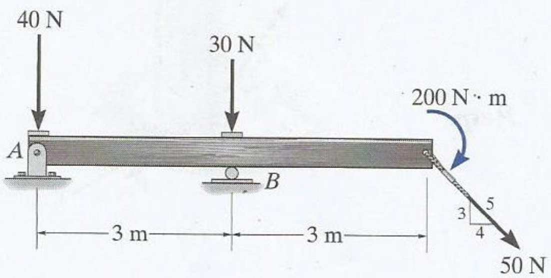
Los resultados se muestran en la figura 4-39*b*.

F4-25. Reemplace el sistema de cargas por una fuerza resultante y un momento de par equivalentes que actúen en el punto A.



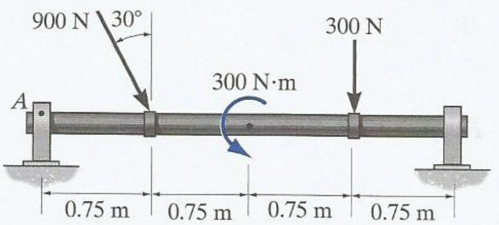
F4-25

F4-26. Reemplace el sistema de cargas por una fuerza resultante y un momento de par equivalentes que actúen en el punto A.



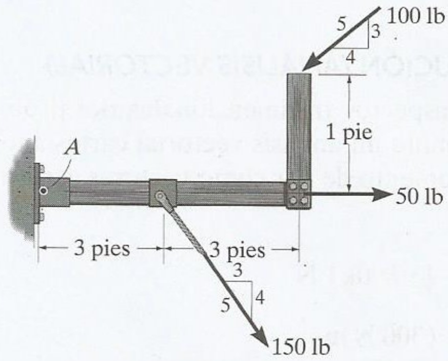
F4-26

F4-27. Reemplace el sistema de cargas por una fuerza resultante y un momento de par equivalentes que actúen en el punto A.



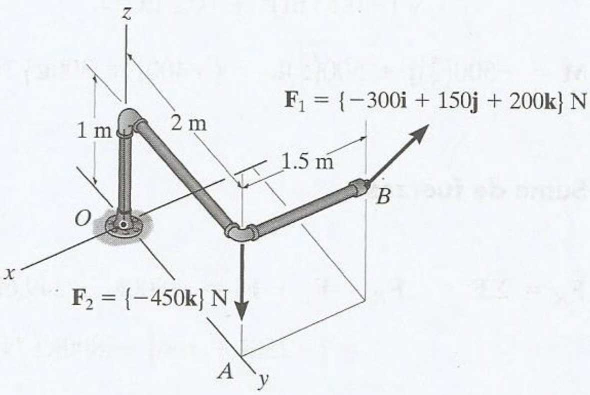
F4-27

F4-28. Reemplace el sistema de cargas por una fuerza resultante y un momento de par equivalentes que actúen en el punto A.



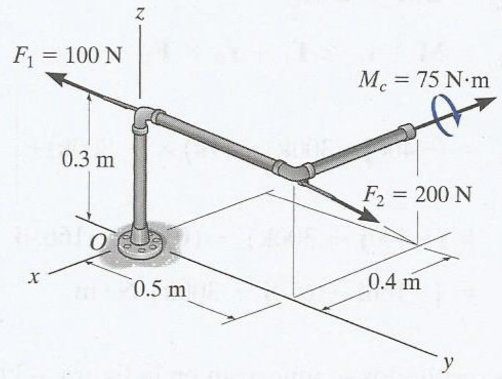
F4-28

F4-29. Reemplace el sistema de cargas por una fuerza resultante y un momento de par equivalentes que actúen en el punto O.



F4-29

F4-30. Reemplace el sistema de cargas por una fuerza resultante y un momento de par equivalentes que actúen en el punto O.



F4-30