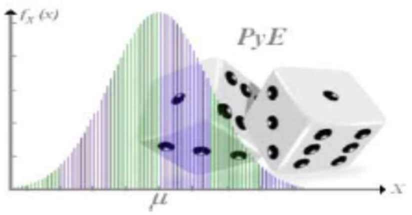



**FACULTAD DE INGENIERÍA**
**DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS**
**COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS**
**SECCIÓN ACADÉMICA DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA**

# SERIE TEMA 3. VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAS.

**Autores: Armando Moisés Pérez Silva, Jorge Federico Paniagua Ballinas y Marco Antonio Gómez Ramírez**

1.- Sean las siguientes distribuciones de probabilidad marginal para las variables X e Y, si se 554sabe que son independientes.

| X | 1 | 2 |
|---|---|---|
| f(x) | 0.4 | 0.6 |

| Y | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| f(y) | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.1 |

Construya la distribución de probabilidad conjunta y b) Demuestre que la covarianza vale cero.

2.- Sea la siguiente función conjunta de densidad de probabilidad de variables aleatorias X y Y:

$$\boldsymbol{f(x,y)} = \begin{cases} \boldsymbol{x+y} \;;\; \boldsymbol{0 \le x \le 1} \\ \qquad\quad\;\; \boldsymbol{0 \le y \le 1} \\ \\ \boldsymbol{0} \quad ;\; \boldsymbol{otro\ valor} \end{cases}$$

Determinar: a) La Covarianza de las variables aleatorias X y Y.
b) El Coefiente de correlación de X y Y.
Respuestas: $\sigma_{XY} = -\frac{3}{432} = -0.0069 \qquad \rho = -0.2727$

3.- Se lanza una moneda legal tres veces. Se definen las siguientes variables aleatorias: Sea ***X*** el número águilas que resultan en los tres lanzamientos y sea ***Y*** la cantidad de dinero que se gana o se pierde en el juego, si: cae águila en el primer lanzamiento se ganan $50 pesos, si cae águila en el segundo o en el tercer lanzamiento se ganan $75 y $100 pesos respectivamente, si no cae águila se pierden $50 pesos.
Determinar: a) La Covarianza de las variables aleatorias X y Y.
b) El Coefiente de correlación de X y Y.
Respuestas: $\sigma_{XY} = 15.625 \qquad \rho = 0.4352$

4.- Para conformar un comité de titulación en la UNAM compuesto por dos personas, se eligen de un grupo de tres doctores, dos maestros y dos licenciados en Ingeniería. Sea ***X*** el número de doctores e ***Y*** el número de maestros que podrían integrar el comité.
Determine si las variables son estadísticamente independientes, justificando su respuesta, si no lo son calcular el coeficiente de correlación.
Respuesta: Coeficiente de correlación $\rho = -0.5478$.

5.- Supóngase que un fabricante de focos está interesado en el número de éstos que han sido pedidos por la demanda de una determinada región de la república durante los dos primeros meses del año. Sea X la variable aleatoria que indica el número de focos requeridos en el mes de enero y Y la variable aleatoria que denota la cantidad de focos que solicita la región citada en el mes de febrero. Suponiendo que $(X\,,Y)$ es una variable aleatoria bidimensional con la siguiente función de densidad de probabilidad conjunta:

$$\mathrm{f(x,y)} = \begin{cases} \mathrm{C} \;\; ; & 5000 \le \mathrm{x} \le 10\,000 \\ & 4000 \le \mathrm{y} \le \;\; 9\,000 \\ & \\ 0 \;\; ; & \text{otro valor} \end{cases}$$

a) Calcular el valor de la constante C.
b) Obtener la probabilidad del evento B, que indica que hay igual o más pedidos de focos en el mes de enero que febrero.

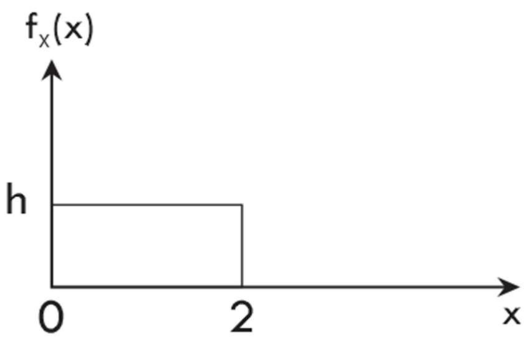
Respuestas: $c = \frac{1}{(5000)^2}$, $\qquad P(X \ge y) = 0.68$

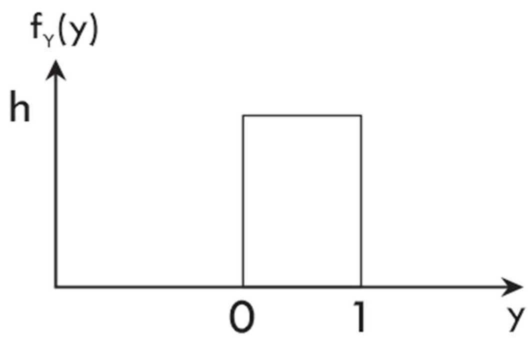
6.- En un estudio de contaminación atmosférica por partículas en muestras de gases de una chimenea, X representa la cantidad en peso de partículas contaminantes por muestra cuando no trabaja un equipo depurador y Y representa la cantidad si el depurador trabaja. Si X y Y tienen la siguiente función de densidad conjunta:

$$\mathrm{f(x,y)} = \begin{cases} 1\,; \quad 0 \le \mathrm{X} \le 2 \;\; ; 0 \le \mathrm{Y} \le \mathrm{X}\,; \quad 2\mathrm{Y} \le \mathrm{X} \\ \\ \qquad\qquad 0 \quad ; \text{otro caso} \end{cases}$$

Determinar: a) E(X), E(Y), b) Var (X) y c) P(B)=P(4Y$\le$ X)
Respuestas: a) $E[X] = \frac{4}{3}$, $E[Y] = \frac{1}{3}$, b) $Var(X) = \frac{2}{9}$, c) $P(B) = \frac{1}{2}$.

7.- Sean las siguientes funciones de densidad de probabilidad de dos variables aleatorias.



a). Si la altura de h es 0.25 para $f_X(X)$ y 1 para $f_Y(Y)$, determine las funciones densidad de probabilidad para las dos variables.
b) Determine la función de probabilidad acumulativa de las dos variables.
c) Determine si las variables son estadísticamente independientes, justifique su respuesta.
d) Si son estadísticamente dependientes, calcule el valor del coeficiente de correlación.

8.- En el salón de clases del curso de probabilidad hay cuatro estudiantes que son excelentes (E), tres estudiantes que son muy buenos (M) y dos estudiantes buenos (B). Se seleccionan dos estudiantes para otorgarles una beca. Sea X la variable aleatoria que representa el número de estudiantes excelentes e Y la variable aleatoria que representa al número de estudiantes muy buenos en la selección.
Respuesta b) $\rho = -0.6322$

9.- Dada la siguiente distribución de probabilidad conjunta

| **f(X, Y)** | | **X** | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 |
| **Y** | 2 | 0.0778 | 0.1667 | 0.0667 |
| | 3 | 0.1667 | 0.1667 | 0.0833 |
| | 4 | 0.1333 | 0.0833 | 0.0555 |

a). Determinar si las variables son estadísticamente independientes, justificar la respuesta.
b) En el caso de que sean estadísticamente dependientes, calcular el coeficiente de correlación.
c) Calcular las siguientes probabilidades: $P(y = 3|x = 2)$ $y$ $P(x = 1|y = 4)$

Respuestas: b) $\rho = -0.1294$ c1) $P(y = 3|x = 2) = 0.4054$ c2) $P(x = 1|y = 4) = 0.3061$

10.- En una fábrica de plafones la producción se realiza con dos equipos A y B, en cuanto al tiempo de elaboración el equipo A tarada una hora en elaborar un plafón y el equipo B tarda dos horas. Considere que los tiempos de elaboración de los plafones son representados por dos variables aleatorias, X e Y respectivamente. El tiempo de elaboración conjunto de los dos equipos está dado por la expresión $f(X, y) = K(x + y)$.
Determinar: a) el valor de K para que la expresión $f(X, Y)$ sea una función densidad de probabilidad, b). las funciones de probabilidad conjunta masa y acumulativa correspondientes.
c). Determinar si las variables son estadísticamente independientes, justificar la respuesta.
d). En el caso de que las variables sean estadísticamente dependientes calcular el coeficiente de correlación.
e) Calculas las siguientes probabilidades: $P\left(x \geq \frac{1}{2} \middle| y > 1\right)$ $y$ $P\left(y < 1 \middle| x \leq \frac{3}{4}\right)$.
Respuestas; c) $\rho = -0.0818$ c1) $P\left(x \geq \frac{1}{2} \middle| y > 1\right) = 0.5625$ c2) $P\left(y < 1 \middle| x \leq \frac{3}{4}\right) = 0.0318$